2024 年度　聖マリアンナ医科大学　前期理系　第３問

問題　a を正の実数，e を自然対数の底，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし，座標平面上の曲線 $y=f(x)$（$0 \leqq x \leqq a$）を C_a で表す。C_a の長さは

$$L(a)=\int_0^a \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

である。

　また $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおくとき，

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x),\ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$$

が成り立つ。以下の (1)，(2)，(4) の $\boxed{\text{チ}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ にあてはまる適切な数，および (3)，(4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\dfrac{g(a)}{L(a)}$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ である。

(2)　$L(a)=1$ のとき $f(a)$ の値と a の値を求めると $f(a)=\boxed{\text{ツ}}$，$a=\boxed{\text{テ}}$ である。

(3)　$L(a)=1$ のとき C_a 上に点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ f(x_k))$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）をとり，$C_a$ の長さを n 等分する。ただし n は正の整数であり，$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=a$ とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$$

となることを示せ。

(4)　$t=g(u)$ という置換を用いて，定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$ を計算すると，その値は $\boxed{\text{ト}}$ である。また解答用紙の所定の欄に $\boxed{\text{ト}}$ の計算過程を記せ。