

問題 区間 $0 \leq x \leq 1$ において定義された 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して

$$I_n(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ のとき,

$$\begin{aligned} I_n(x^2, x^3) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \left(\boxed{\text{ア}} k^4 + \boxed{\text{イ}} k^3 + \boxed{\text{ウ}} k^2 \right) \end{aligned}$$

と表されるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, x^3) = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\sin \pi x, x^2) = \boxed{\text{オ}}$

(3) 区間 $0 \leq x \leq 1$ において, 次の 3 つの関数 $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ を考える。

$$h_1(x) = x - x^2, \quad h_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad h_3(x) = x$$

(i) $h_1(x) - h_2(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) $h_2(x) - h_3(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ク}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(iii) $I_n(x^2, e^x)$ を $h_2(x)$ を用いて表すと,

$$I_n(x^2, e^x) = \sum_{k=1}^n \boxed{\text{コ}} h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。

(i), (ii), (iii) を利用すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x^2, e^x) = \boxed{\text{サ}}$ である。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{I_n(x^2, e^x) + I_n(e^x, x^2)\} = \boxed{\text{シ}}$$