

問題 ('05 鹿児島大)

【難易度】 … 標準

次の問いに答えよ。

(1) 2個の負でない実数 a, b に対して, $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ。(2) 負でない実数 a, b, c について, $a+b \geq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ。

(3) n を 2 以上の整数とする. n 個の負でない実数 a_1, a_2, \dots, a_n と負でない実数 c について, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq c$ ならば,

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ。

【テーマ】: 不等式の証明

方針

(1) 不等式を用いた通分を行うとすっきりと示せます. (1), (2) の流れを一般化して (3) を示します。

解答

(1) 【証明】

 $a \geq 0, b \geq 0$ であるから,

$$\frac{a}{1+a} \geq \frac{a}{1+a+b}, \quad \frac{b}{1+b} \geq \frac{b}{1+a+b}$$

辺々加えて,

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a+b}{1+a+b}$$

ゆえに, 示された。

(証明終)

(2) 【証明】

 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ および $a+b \geq c$ より,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{1+a+b} - \frac{c}{1+c} &= \frac{a+b + (a+b)c - c(1+a+b)}{(1+a+b)(1+c)} \\ &= \frac{a+b-c}{(1+a+b)(1+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{a+b}{1+a+b} \geq \frac{c}{1+c} \dots\dots \textcircled{1}$$

これと (1) の結果より,

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a+b}{1+a+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つので, 示された。

(証明終)

(3) 【証明】

$i = 1, 2, \dots, n$ とする. このとき, 各 i に対して, $a_i \geq 0$ であるから,

$$\frac{a_i}{1+a_i} \geq \frac{a_i}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}$$

が成り立つので, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ として辺々加えると,

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_n} \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ. ここで, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくと, $S_n \geq c$ より, (2) で示した不等式 ② と同様にすれば,

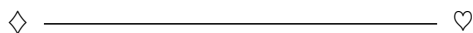
$$\frac{S_n}{1+S_n} \geq \frac{c}{1+c} \iff \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_n} \geq \frac{c}{1+c} \dots\dots \textcircled{3}$$

が成り立つので, ②, ③ より,

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{c}{1+c}$$

が示された.

(証明終)



【解説】

(1) は, 大きい方から小さい方を引いても示すことができますが, 計算量が多くなります. 本問は, 分母に正の数を加えて不等式を用いて通分しているのので, 計算量が少なくすっきりとした証明ができます.

(2) は, 大きい方から小さい方を引いて示し, (1) の結果とあわせることで証明ができます.

(3) は, (1), (2) で示したことをヒントに一般化する問題です. (1) でやった証明方法を用いないと難しいでしょう. (2) の結果を用いたのので, $S_n \geq c$ を述べておくことが必須です.