

【問題】 ('12 九州工業大・改)

【難易度】 … 標準

O を原点とする座標平面上に点 $P_0(1, 1)$, $Q_0(1, 0)$ がある. ある p ($0 < p < 1$) に対して, 点 $P_1(p, p)$, $Q_1(p, 0)$ を定め, さらに, 自然数 n について点 P_{n+1} , Q_{n+1} を次のように定める.

- ・点 Q_n を通り直線 Q_0P_1 と平行な直線と, 直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする.
- ・点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と, x 軸の交点を Q_{n+1} とする.

また, $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 を p を用いて表せ.
- (2) 点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき, 点 Q_n の x 座標を p, q を用いて表せ.
- (3) S_n を p, n を用いて表せ.
- (4) n を定数として, p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき, S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた S_n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ.