

問題 ('03 津田塾大)

【難易度】…標準

次の条件をみたす 4 桁の正の整数 $d_4d_3d_2d_1$ の個数をそれぞれの場合について求めよ.

$$(1) \quad 9 \geq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geq 0$$

$$(2) \quad 9 \geq d_4 \geq d_3 \geq d_2 \geq d_1 \geq 0$$

【テーマ】: 4 桁の整数の個数

方針

(1) は,異なる 4 つの数を選んでくることで,大小関係が 1 通りに定まることを利用します.(2) では, $d_4 \geq d_3$ などにある $=$ (イコール) を取り除くことを考えましょう. イコールが取り除ければ, (1) と同じ考え方で解くことができます. ただし, $d_4 \neq 0$ であることに注意する必要があります.

解答

(1) 0~9 の 10 個の中から異なる 4 個の数を選べば, 大小関係は 1 通りに定まることから, 大きい順に d_4, d_3, d_2, d_1 とすればよいので, 求める個数は,

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210(\text{個}) \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $9 \geq d_4 \geq d_3 \geq d_2 \geq d_1 \geq 0 \iff 12 \geq d_4 + 3 > d_3 + 2 > d_2 + 1 > d_1 \geq 0$

であり, $d_4 + 3 = D_4, d_3 + 2 = D_3, d_2 + 1 = D_2$ とおくと,

$$12 \geq D_4 > D_3 > D_2 > d_1 \geq 0$$

となる. d_2, d_3, d_4 はそれぞれ D_2, D_3, D_4 と 1 対 1 に対応しているので, (1) と同様に考えればよい.

0~12 の 13 個の中から異なる 4 個を選べばよいが, このうち $d_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 3$ のときは, $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$ となるので, 条件をみたさない. ゆえに, 求める場合の数は,

$${}_{13}C_4 - 1 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 1 = 13 \cdot 55 - 1 = 714(\text{個}) \cdots \cdots (\text{答})$$

解説

(1) では, 4 つの数がすべて異なっているので, 10 個の中から異なる 4 つの数を選んでくるだけで求めることができます. その際, $d_4 = 0$ となる心配がないので, 最高位の数が 0 になる場合を考える必要はありません.

(2) では, 4 つの数がすべて異なっている訳ではないので, 真面目に場合分けをすると次のように 8 通りしなければいけません.

$$(i) \quad d_4 = d_3 = d_2 = d_1 \qquad (v) \quad d_4 > d_3 > d_2 = d_1$$

$$(ii) \quad d_4 > d_3 = d_2 = d_1 \qquad (vi) \quad d_4 > d_3 = d_2 > d_1$$

$$(iii) \quad d_4 = d_3 > d_2 = d_1 \qquad (vii) \quad d_4 = d_3 > d_2 > d_1$$

$$(iv) \quad d_4 = d_3 = d_2 > d_1 \qquad (viii) \quad d_4 > d_3 > d_2 > d_1$$

さすがにこれは大変です. そもそも面倒にしている原因は $=$ (イコール) なのですから, これを取り去る方法を考えます.

$d_2 \geq d_1$ が成り立っているということは、左辺に 1 を加えれば、

$$d_2 + 1 > d_1 \quad \dots\dots①$$

となり、イコールが消えます。同様に、

$$d_4 + 1 > d_3, \quad d_3 + 1 > d_2$$

も成り立ちます。これらを一つの不等式にするためには、前者の不等式の両辺に 2 を、後者の不等式の両辺に 1 を加えて、

$$d_4 + 3 > d_3 + 2, \quad d_3 + 2 > d_2 + 1 \quad \dots\dots②$$

と変形する必要があります。こうすることで、①、②において $d_2 + 1$, $d_3 + 2$ という部分で不等式を繋げることができるので、

$$12 \geq d_4 + 3 > d_3 + 2 > d_2 + 1 > d_1 \geq 0$$

を得るというわけです。