7　（オリジナル問題）　**【難易度】**… 標準

a, b を実数とし，$a \geqq 1$ とする．対数不等式

$$\log_2(x+1)+\log_4(a-x) \leqq b \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　x の取り得る値の範囲を a を用いて表せ．

(2)　(1) で求めたすべての実数 x に対して $(*)$ が成り立つための a, b の条件式を求めよ．

(3)　b の最小値を求めよ．

【テーマ】：条件不等式

方針

対数を含む問題で忘れてはならないのが『底の条件と真数条件』です．次に対数不等式を式変形して 3 次不等式にもっていけばあとは微分で処理できます．

本問で学んでほしいことは (2) のような問題をどのように解釈して解くかということです．対数不等式を式変形していけば 3 次不等式に帰着しますが，そこから題意をみたすためにはどのようになればよいかを述べなくてはいけません．

ポイント

同値変形で３次の条件不等式の問題へ！

ちなみに，『絶対不等式』とは，どんな状況でも成り立つ不等式のことを言います．例として，$x^2-2x+2>0$ や有名な不等式で言うと，相加平均・相乗平均の関係の不等式，コーシー・シュワルツの不等式などがそれにあたります．『条件不等式』とはこの問題のようにある決められた条件のもとで必ず成り立つ不等式のことを言います．本問は (1) で求めた x の値のもとで常に成り立つので条件不等式ということになります．

♣　♠

解答

(1)　真数条件より，

$$x+1>0 \text{ かつ } a-x>0$$

したがって，$\boldsymbol{-1<x<a}$　$(\because\ a \geqq 1)$ ……(**答**)

(2)　与えられた不等式を変形すると，　☞ 公式

$$\log_4(x+1)^2+\log_4(a-x) \leqq \log_4 4^b \iff \log_4(x+1)^2(a-x) \leqq \log_4 4^b$$

底は 4 で 1 より大きいので，$(x+1)^2(a-x) \leqq 4^b$ である．

ここで，$f(x)=(x+1)^2(a-x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2x+1)(a-x) \\ &= ax^2+2ax+a-x^3-2x^2-x \\ &= -x^3+(a-2)x^2+(2a-1)x+a \\ \therefore\ f'(x) &= -3x^2+2(a-2)x+2a-1 \\ &= (x+1)(-3x+2a-1) \end{aligned}$$

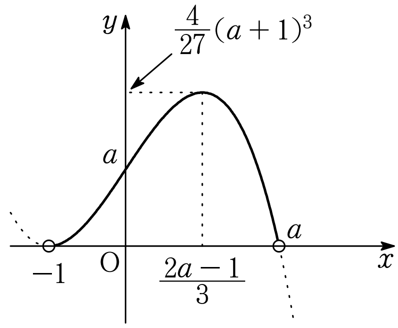
したがって，$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$ ，$\dfrac{2a-1}{3}$ となる．$a \geqq 1$ であるから，

$$2a \geqq 2 \iff 2a-1 \geqq 1 \iff \frac{2a-1}{3} \geqq \frac{1}{3}$$

であり，$a-\dfrac{2a-1}{3}=\dfrac{a+1}{3}>0$ であることより，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{2a-1}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大値	↘	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2a-1}{3}\right) &= \left(\frac{2a-1}{3}+1\right)^2\left(a-\frac{2a-1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2a+2}{3}\right)^2\left(\frac{a+1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{27}(a+1)^3 \quad ☞ \boxed{解説} \end{aligned}$$



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．
よって，$-1<x<a$ で常に $f(x) \leqq 4^b$ となるためには，

$$\frac{4}{27}(a+1)^3 \leqq 4^b$$

両辺に底が 4 の対数をとると，

$$\log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3 \leqq \log_4 4^b$$

したがって，$\boldsymbol{b \geqq \log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3}$**……(答)**

(3)　$y=\log_4 \dfrac{4}{27}(x+1)^3$ は増加関数であるから，$a \geqq 1$ と (2) の結果より，

$$\begin{aligned} b &\geqq \log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3 &&\geqq \log_4 \frac{4}{27}(1+1)^3 \\ &= \log_4 \frac{4}{27}\cdot 8 &&= \log_4 2^5 - \log_4 27 \\ &= \log_2 2^{\frac{5}{2}} - \log_4 3^3 &&= \frac{5}{2} - 3\log_4 3 \end{aligned}$$

したがって，b の最小値は，$\boldsymbol{\frac{5}{2}-3\log_4 3}$**……(答)**

◇　♡

$\boxed{解説}$

真数条件は，式変形を行う前にすること．

$$\log_4(x+1)^2+\log_4(a-x) \leqq b$$

と式変形した後で真数条件を行うと，$x \neq -1$, $x<a$ となってしまうので，注意したい．

(2) の計算をうまくやる秘訣は，因数分解を巧みに利用することにあります．むやみに展開してはいけません．本問のように文字計算においては当然のことなんですが，数字の計算においてもこの方法をうまく利用することが，計算を速く正確にこなす秘訣になります．

公 式　$a,\ b,\ c$ は 1 でない正の数とする．
対数の底を変換する公式として底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

がありますが，毎回これを使っていたのでは非効率的です．そこで，この底の変換公式から導かれる式は公式として覚えておきましょう！

（ｉ）　$\log_a b = \log_{a^n} b^n$（$n$ は実数）

（ii）　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

（iii）　$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

特に，（ｉ）の公式は絶対に使いこなせるようにしておきましょう．対数関数・対数方程式・対数不等式の問題で底を揃えるときにほぼ間違いなく活用できるはずです．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto