

15 (オリジナル問題)

【難易度】… 標準

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \max \left\{ e^{-2x}, \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right\} \text{ とする.}$$

ただし, $\max\{a, b\}$ は, $a < b$ のとき b , $a \geq b$ のとき a を表すものとする.

- (1) $y = f(x)$ のグラフを図示せよ.
- (2) $y = f(x)$ と 3 直線 $x = -\log 2$, $x = \log 2$, x 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

【テーマ】: 回転体の体積

方針

$\max\{a, b\}$ は小さくない方 (大きい方と等しいとき) の値をとることに注意して, 関数を決定しよう. $x = 0$ を境に関数が変わるということに気付けたかどうかポイントになる. それを元にグラフをかこう. (2) は回転体がどのような図形になるかを想像して体積を求める式を立式する.

$\max\{a, b\}$ は受験ではちよくちよく見かける記号ですが, 教科書には登場しません. このように教科書には載っていない記号を用いるときは, 必ずその記号の説明が問題文中に書かれています. しかし, それをその場で理解して解答するのは意外に難しい場合が少なくありません. (記号を誤解して解釈してしまえば全滅は避けられませんから...) つまり, できるだけ受験で取り上げられる記号は知っておく必要があるのです. 知っている人と知らない人では当然本番で差がついてしまいます. 知っている記号が出たとしても問題文をきちんと読んで, 自分の知っている定義とちゃんと合致しているかどうかを確認するようにしてください. (思い込みは最大の敵です.)

さて, 体積計算ですがみなさんよく π をかけるのを忘れますので, 十分注意してください. また, 回転体の体積は, x 軸回転, y 軸回転が頻出です. どの変数で積分したらいいかわからなくなったという話をよくききます. 次のことを押さえておきましょう.

ポイント

回転体の体積の計算は, 回転軸の変数で積分する

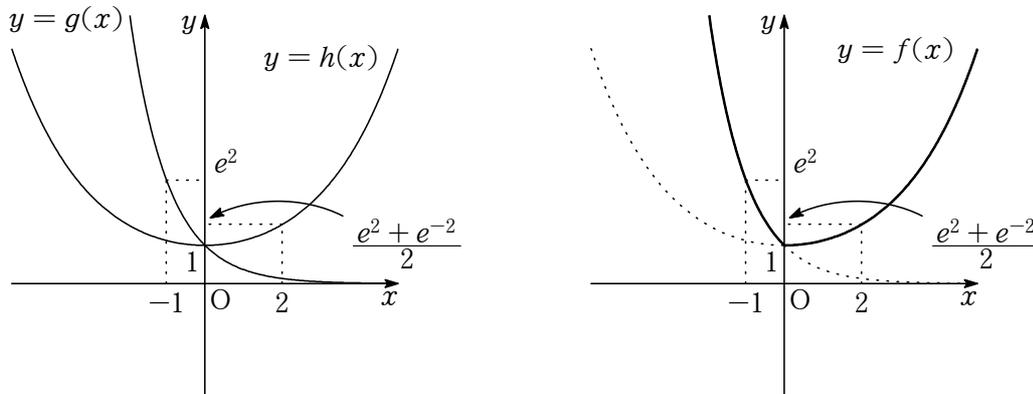
もちろん, 回転軸がそれ以外の問題もありますが, それはまた追々扱っていきます.

解答

- (1) $g(x) = e^{-2x}$, $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくと, $h'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから, $h'(x) = 0$ のとき, $e^x = e^{-x}$ より, $x = 0$ である. よって, 増減表は次のようになる.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

したがって、 $g(x)$ 、 $h(x)$ のグラフは下図のようになるから $y = f(x)$ は右下図のようになる……(答)



(2)

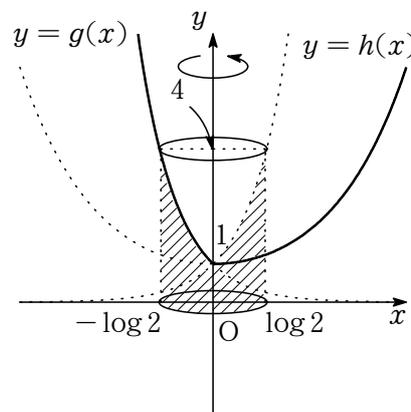
$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & (x < 0) \\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (x \geq 0) \end{cases}$$

であるから、

$$f(-\log 2) = e^{2\log 2} = e^{\log 4} = 4$$

$$f(\log 2) = \frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

よって、 $y = f(x)$ を y 軸のまわりに一回転してできる回転体は右図のようになる。



ゆえに、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot (\log 2)^2 \cdot 4 - \pi \int_1^4 x^2 dy \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - \pi \int_1^4 \left(-\frac{\log y}{2}\right)^2 dy \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - \frac{\pi}{4} \int_1^4 (\log y)^2 dy \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - \frac{\pi}{4} \left(\left[y(\log y)^2 \right]_1^4 - \int_1^4 y \cdot 2(\log y) \cdot \frac{1}{y} dy \right) \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - \frac{\pi}{4} \left(4(\log 4)^2 - 2 \int_1^4 \log y dy \right) \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - \pi(\log 4)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\left[y \log y - y \right]_1^4 \right) \\ &= 4\pi(\log 2)^2 - 4\pi(\log 2)^2 + \frac{\pi}{2} (4 \log 4 - 4 + 1) \\ &= \frac{\pi}{2} (4 \log 4 - 3) \\ &= 4\pi \log 2 - \frac{3}{2}\pi \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

解説

記号の意味をしっかりと捉えることができれば (1) は基本的なグラフをかき問題でしょう。(2) は y 軸回転の回転体の体積を求めるので y で積分します。その際に積分区間と被積分関数が何になるかに十分注意しましょう。