17 （オリジナル問題）　**【難易度】**… やや難

原点を O とする平面上に中心 $(2,\ 2)$，半径 1 の円 C がある．C 上に動点 $\mathrm{P_1}\ (a,\ b)$ をとり，直線 $\mathrm{OP_1}$ と円 C が交わる 2 点のうち $\mathrm{P_1}$ 以外の交点を $\mathrm{P_2}$ とする．線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点を M とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{P_2}$, M の座標を $a,\ b$ を用いてできるだけ簡単な形で求めよ．

(2)　点 M の軌跡を求めよ．

【テーマ】：軌跡

方針

点 M の軌跡が求めたいので，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とおいて $X,\ Y$ の関係式を求める．という軌跡の常套手段にしたがって解答すればよい．軌跡の限界があることに注意．

本問は，方針 でも示したとおり，軌跡の問題では標準的な問題なのだが，文字計算が大変なので，文字計算に慣れていない人にはやや難しく感じることと，軌跡の限界が出てくることに注意が必要です．ある程度正しい図がかければ軌跡の限界の有無はわかるはずなので，軌跡を求めるときは，必ずどのような軌跡になるのか？と予想することも大切です．

ポイント

図をかいて，軌跡の限界の有無を予想！
式変形は意味を考えながら行う

♣　♠

解答

(1)　$C\ :\ (x-2)^2+(y-2)^2=1$ である．

$$\text{直線 OP}\ :\ y=\frac{b}{a}x$$

これを，円の式に代入して，

$$(x-2)^2+\left(\frac{b}{a}x-2\right)^2=1$$

これを，x に関して整理すると，

$$(a^2+b^2)x^2-4a(a+b)x+7a^2=0 \quad \cdots\cdots\text{Ⓐ}$$

$$x=\frac{2a(a+b)\pm\sqrt{4a^2(a+b)^2-7a^2(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$$

ここで，点 P は円 C 上の点であるから，

$$(a-2)^2+(b-2)^2=1$$

$$a+b=\frac{a^2+b^2+7}{4} \quad \cdots\cdots\text{Ⓑ}$$

これを代入して，

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2a\dfrac{a^2+b^2+7}{4} \pm \sqrt{4a^2\dfrac{(a^2+b^2+7)^2}{16} - 7a^2(a^2+b^2)}}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a\dfrac{a^2+b^2+7}{2} \pm a\sqrt{\dfrac{1}{4}\{(a^2+b^2)^2+14(a^2+b^2)+49-28(a^2+b^2)\}}}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(a^2+b^2+7)a \pm \sqrt{\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-7)^2}}{2(a^2+b^2)} \\
&= \frac{(a^2+b^2+7)a \pm a(a^2+b^2-7)}{2(a^2+b^2)} \\
&= \begin{cases} a \\ \dfrac{7a}{a^2+b^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$x \risingdotseq a$ より，

$$x = \frac{7a}{a^2+b^2}$$

したがって，求める P_2 の値は，

$$\mathbf{P_2}\left(\boldsymbol{\frac{7a}{a^2+b^2}}\ ,\ \boldsymbol{\frac{7b}{a^2+b^2}}\right)\cdots\cdots(\textbf{答})$$

よって，M の座標は，

$$\mathrm{M}\left(\frac{\dfrac{7a}{a^2+b^2}+a}{2}\ ,\ \frac{\dfrac{7b}{a^2+b^2}+b}{2}\right)$$

これを整理して，

$$\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}}\ ,\ \boldsymbol{\frac{2b(a+b)}{a^2+b^2}}\right)\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと，

$$X = \frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}\ ,\ Y = \frac{2b(a+b)}{a^2+b^2}$$

となる．ここで，

$$X^2+Y^2 = \frac{4(a+b)^2}{a^2+b^2}\ ,\ X+Y = \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}$$

したがって，

$$X^2+Y^2 = 2(X+Y)$$

これを，整理して，

$$(X-1)^2+(Y-1)^2 = 2$$

問題から，点 M の軌跡は，この円が円 C によって切り取られた部分であるから，2 円の交点を求める必要がある．

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 = 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

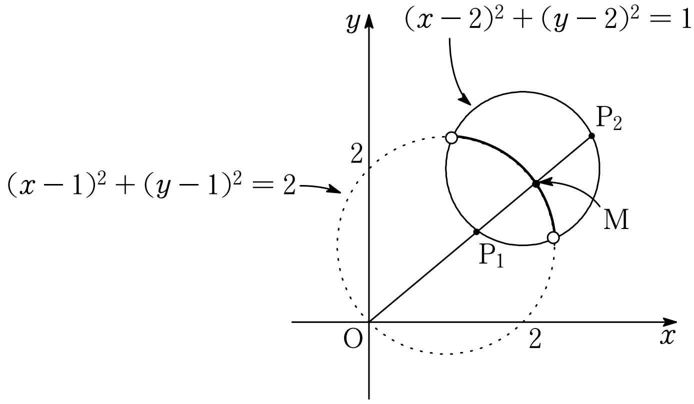
この連立方程式を解くと，

$$x = \frac{7\pm\sqrt{7}}{4}\ ,\ y = \frac{7\mp\sqrt{7}}{2}\quad \text{（複号同順）}$$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

求める点 M の軌跡は,

$$\textbf{中心 }(1,1)\textbf{，半径 }\sqrt{2}\textbf{ の円で}\left(\begin{array}{l}\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}<x<\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}\\ \dfrac{7-\sqrt{7}}{2}<y<\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right)\textbf{の部分}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$



◇ ♡

解説

(1) の計算では，x の 2 次方程式を解の公式を用いて解きましたが，次のように計算することもできます．

Ⓐ, Ⓑ より,

$$(a^2+b^2)x^2-a(a^2+b^2+7)x+7a^2=0$$

であるから，これを因数分解して,

$$\left\{(a^2+b^2)-7a\right\}(x-a)=0$$

となる．よって，$x=\dfrac{7a}{a^2+b^2},\ a$

そんな因数分解なんて思いつかないよ！って言う人がいるかもしれませんが，よく考えてみてください．Ⓐ の実数解は直線 OP と円 C の交点の x 座標を表します．つまり Ⓐ の解の一つは点 P_1 の x 座標である a に他ならないのです．それをヒントに因数分解をしていけば容易に求めることができます．

(2) の計算は一度経験していなければやや困難でしょう！しかし，これにも解答の糸口はあるのです．それは，始めに述べたように点 M の軌跡が予想できているかどうかにかかってきます．もし円であるという予想が立っていれば答えは当然 X^2, Y^2 を含んでいるはずなので，まずはこの計算をしてみることから始めるでしょう！しかし，円であるという予想が立っていない人はこの計算をするには勇気がいります．（ただでさえ式が複雑なのに 2 乗したらもっと複雑になりそうだという心境が働くためです．）

このように，式変形は闇雲にするのではなく，今何を求めているのか？あるいは，この方程式の解の一つは何なのか？など，式の意味を捉えながらすると見通しが立つことがあります．普段の学習でこのような癖をつけるようにして本番に備えましょう．

Ⓒ 大学受験・数学塾 管理人：makoto