24 （法政大） **【難易度】… 標準**

点 F$(0,\ p)$ を通る直線と，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ との交点を A, B とする．A, B における放物線の接線の交点を C とすれば，AB ⊥ CF となることを示せ．

【テーマ】：直交条件の表現

方針

点 F を通る直線と，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ の交点の座標を自分で設定して，素直に計算すれば証明できます．

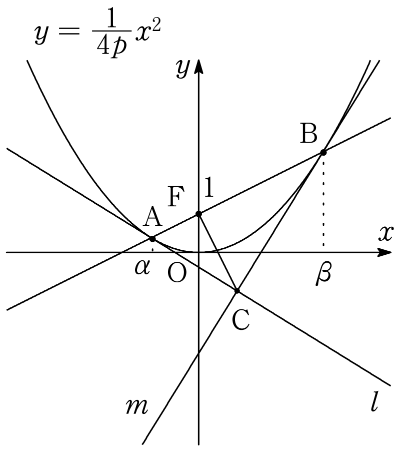
交点の x 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とおいて素直に計算すればよいだけなのですが，直交条件をどのように表現すればよいかで解答が分かれるでしょう．直交と聞いて思い出せるものはいくつありますか？

ポイント

直交しているならば $\left\{\begin{array}{l}\text{傾きかけて}-1\\ \text{内積}\,0\end{array}\right\}$ を利用．

解答

【証明】



まず，$p>0$ として考える．A$\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{4p}\right)$, B$\left(\beta,\ \dfrac{\beta^2}{4p}\right)$ とおく．

A, B における放物線の接線をそれぞれ $l,\ m$ とすると，

$y'=\dfrac{1}{2p}x$ より，

$$y=\frac{1}{2p}\alpha(x-\alpha)+\frac{\alpha^2}{4p}$$

$$\therefore\ y=\frac{\alpha}{2p}x-\frac{\alpha^2}{4p}\ \cdots\cdots①$$

同様にすると，

$$y=\frac{\beta}{2p}x-\frac{\beta^2}{4p}\ \cdots\cdots②$$

を得る．$l,\ m$ の交点の x 座標は，①, ② より，

$$\frac{\alpha}{2p}x-\frac{\alpha^2}{4p}=\frac{\beta}{2p}x-\frac{\beta^2}{4p}\iff 2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$$

$\alpha\neq\beta$ であるから，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．よって，y 座標は，

$$y=\frac{\alpha}{2p}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha^2}{4p}=\frac{\alpha\beta}{4p}$$

となる．したがって，点 C の座標は，C$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha\beta}{4p}\right)$ となる．

ここで，点 F を通る直線の傾きを k とすると，$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式

$$\frac{1}{4p}x^2=kx+p\iff x^2-4pkx-4p^2=0$$

の 2 解であるから，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=4pk,\ \alpha\beta=-4p^2\quad\cdots\cdots③$$

が成り立つ．よって，$C(2pk,\ -p)$ である．直線 AB と直線 CF の傾きはそれぞれ

$$\frac{\frac{1}{4p}(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{4p}=k,\ \frac{-p-p}{2pk}=-\frac{1}{k}$$

となるので，これらの傾きの積が -1 となることから，$AB\perp CF$ となることが示された．
$p<0$ のときも同様になるので，題意は示された． **(証明終)……(答)**

別解

直交するということなので，ベクトルを用いても解答することができます．点 C を求めるところまでは同じですから，それ以降を記述します．

【証明】

$$\overrightarrow{AB}=\left(\beta-\alpha,\ \frac{\beta^2-\alpha^2}{4}\right),\overrightarrow{FC}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha\beta}{4p}-p\right),\overrightarrow{FA}=\left(\alpha,\ \frac{\alpha^2}{4p}-p\right)$$

であるから，③ を用いると，

$$\overrightarrow{AB}=(\beta-\alpha,\ pk(\beta-\alpha)),\overrightarrow{FC}=(2pk,\ -2p)$$

となるので，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}=2pk(\beta-\alpha)-2pk(\beta-\alpha)=0$$

よって，題意は示された． **(証明終)……(答)**

◇ ♡

解説

直交するという条件から，「傾きかけて -1」という方針か「内積 0」という方針の 2 種類が見えてきます．
本問の場合は，どちらにしても計算をうまくしないと，計算量が膨大になってしまいます．ベクトルを使った解答では，別解 でもしているように $\beta-\alpha$ をそのままにしておく方が計算が簡単になります．
また，本問ではもう一つ注意しないといけないことがあります．それは p の符号です．対称性を考えれば，$p>0$ の場合だけを議論すれば問題ないので，$p<0$ については，同様にすれば成り立つ程度で十分でしょう．ただし，問題文に $y=\frac{1}{4p}x^2$ という式があるので，$p\neq 0$ であることは自明ですから，$p\geqq 0$ や $p\leqq 0$ などのように $=$ を入れないように注意しましょう．