

31

【解答時間...30分】

 n を自然数とする .

$$S_n = \frac{1^2}{\sqrt{1^3+1}} + \frac{2^2}{\sqrt{2^3+1}} + \frac{3^2}{\sqrt{3^3+1}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$$

について , 次の問いに答えよ .

- (1) $x \geq 1$ のとき , 関数 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ は単調増加でかつ上に凸であることを示せ .
- (2) $\int_1^{n+1} f(x) dx$ を求めよ .
- (3) p を正の実数とする . $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^p}$ が収束するように p の値を定め , その極限値を求めよ .