23 【難易度】 … 標準

2 つの放物線

$$\begin{cases} C_1 : f(x) = -x^2 + 4x - 1 \\ C_2 : g(x) = mx^2 \end{cases}$$

がある．ただし，m は定数とする．

(1) C_1 と C_2 が接するときの m の値と接点を求め，共通接線の方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 点 A, B で交わるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とする．2 点 A, B を通る直線 l が S を 2 等分するとき，m の値を求めよ．

【テーマ】：面積計算のテクニック

方針

(1) は $f(x) = g(x)$ が重解をもてばよいので，(判別式) $= 0$ を用いますが，2 次の係数に文字が含まれているので，場合分けが必要です．(2) は，面積計算をしますが，2 点 A, B を通る直線の方程式を求める必要はありません．

♣ ♠

解答

(1) C_1 と C_2 が接するので，

$$-x^2 + 4x - 1 = mx^2 \iff (m+1)x^2 - 4x + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

が重解をもてばよい．

(i) $m + 1 = 0$ すなわち $m = -1$ のとき，① は 1 次方程式となり，重解をもたないので不適．

(ii) $m + 1 \neq 0$ すなわち $m \neq -1$ のとき，① の判別式を D とすると，

$$D/4 = 4 - (m+1) = 0 \qquad \therefore \ \boldsymbol{m = 3} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

このとき，① は，

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x-1)^2 = 0 \qquad \therefore \ x = \frac{1}{2} \ \text{このとき，} y = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となるので，接点は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}$……(**答**)

また，共通接線の方程式は，$g(x)$ 上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ における接線を求めればよい．$g(x) = 3x^2$ より，$g'(x) = 6x$ であるから，

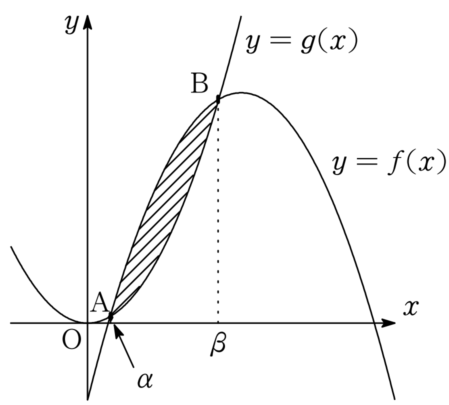
$$\therefore \ y = 6 \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \iff \boldsymbol{y = 3x - \frac{3}{4}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるためには，$D>0$ となればよいので，(1) より，

$$4 - (m+1) > 0 \iff m < 3$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，α, β は ① の 2 解であり，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta}\{-(m+1)x^2+4x-1\}\,dx \\
&= -(m+1)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -(m+1)\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\
&= \frac{m+1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$



題意をみたすためには，l と C_2 で囲まれる部分の面積が $\dfrac{S}{2}$ となればよい．ここで，l を表す方程式を $y=h(x)$ とすると，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $h(x) \geqq g(x)$ であり，$y=h(x)$ は 1 次関数であることから，

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_{\alpha}^{\beta}\{h(x)-mx^2\}\,dx \\
&= -m\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -m\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\
&= \frac{m}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad \therefore\ S=\frac{m}{3}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\frac{m+1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{m}{3}(\beta-\alpha)^3 \iff m+1=2m \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=1}\cdots\cdots(\textbf{答})
$$

◇ ♡

解説

まず，次の公式が成り立つことを確認してください．

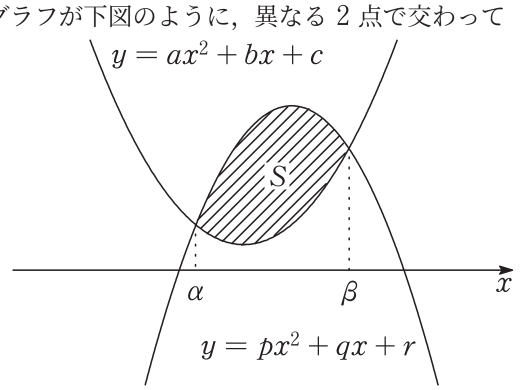
$$
\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3
$$

2 つの 2 次関数で囲まれる部分の面積は，この公式を用いて簡単に求めることができます．

2 つの 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$, $y=px^2+qx+r$ のグラフが下図のように，異なる 2 点で交わっているとき，これらの曲線で囲まれる部分の面積 S は，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\}\,dx \\
&= (p-a)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -\frac{p-a}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

となる．



面積を計算するときは，2 次関数の 2 次の係数と交点の x 座標だけが必要であることに注意しましょう．交点の x 座標がわかっていれば，1 次の係数と定数項を知る必要はありません．**解答** で直線 AB の方程式を求めなかったのは，このためです．式変形は，計算による変形だけではなく意味をしっかりと捉えることで効率よい変形が行えることを知っておきましょう．