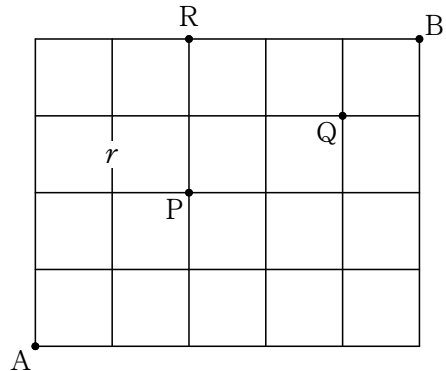


29 ('04 法政大)

【難易度】…標準

右図のような街路があり、A から B へ最短距離で行くとする。複数の路が出会う地点では、2 つの方向が選べるなら等確率で進行方向を決める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P を通り B へ行く確率を求めよ。
- (2) P か Q の少なくとも一方を通り B へ行く確率を求めよ。
- (3) r の地点が通れなくなったときに、R を通り B へ行く確率を求めよ。



【テーマ】：経路の確率

方針

経路の確率を求める際は、何も考えずに $\frac{\text{考えている経路の数}}{\text{経路の総数}}$ という計算をしてはいけません。なぜなら、経路の総数一つ一つは同様に確からしくないからです。それは、分岐点では $\frac{1}{2}$ の確率で、上か右に進みますが、一番上の路や一番右の路に来たときは、確率 1 で移動することになるからです。この点に十分注意して計算しましょう。

解答

- (1) A から P へ行く場合、右へ 2 回、上へ 2 回移動すればよく、その各々の路はすべて確率 $\frac{1}{2}$ で選ぶ。さらに P から B へは必ず辿り着くので、確率は 1 となる。ゆえに、求める確率は、

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \dots\dots (\text{答})$$

- (2) P を通り B へ行く確率を P_P 、Q を通り B へ行く確率を P_Q 、P、Q をともに通る B へ行く確率を P_{PQ} と表すこととする。このとき、(1) より、 $P_P = \frac{3}{8}$ である。また、(1) と同様に考えることにより、

$$P_Q = {}_7C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 1 = 35 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{35}{128}$$

である。さらに、

$$P_{PQ} = P_P \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

であるから、求める確率を P とすると、

$$P = P_P + P_Q - P_{PQ} = \frac{3}{8} + \frac{35}{128} - \frac{9}{64} = \frac{48 + 35 - 18}{128} = \frac{65}{128} \dots\dots (\text{答})$$

となる。

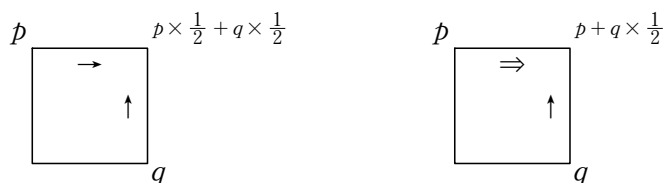
- (3) 経路の確率を図にかき入れて計算する。

→ および ↑ …… 確率 $\frac{1}{2}$ で移動することを表す。

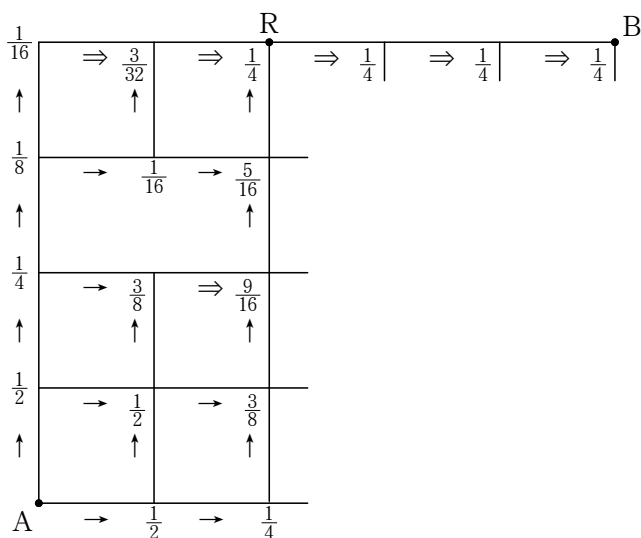
⇒ …… 確率 1 で移動することを表す。

この記号をもとに、次のように計算を行う。ただし、図中の p 、 q を含む式は交差点に辿り着く確率を表すものとする。

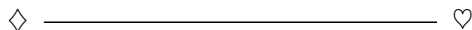
【計算方法】



この計算方法を使って、各交差点に辿り着く確率を計算すると次の図のようになる。ただし、図中の数は交差点に辿り着く確率を表している。



よって、求める確率は $\frac{1}{4}$ ……(答)



解説

確率は、 $\frac{\text{起こりうる場合の数}}{\text{すべての場合の数}}$ で計算できますが、これは『すべての場合の数が同様に確からしい』ときのみできる計算です。[方針]でも書いたように、本問では図の『一番上の路』と『一番右の路』を通る際には、確率 1 で移動するため、このような計算ができなくなります。

(1) は、A から P まで行くとき、図の一番上の路と一番右の路を通ることはないので、すべての路が同様に確からしいことになるので、[解答]のように計算できます。P から B までには必ず到達することから確率は 1 になるため考える必要はありません。(実際に計算してみるとよいでしょう。)

(2) も、(1) と同様に図の一番上の路と一番右の路を通ることはないので、集合の考え方をういて計算することができます。なお、別解としては、余事象の確率を考えることもできます。P, Q をともに通らない確率を (3) のように図にかき込んで求める方法もありますが、計算間違いをする可能性が高いためあまりお勧めできません。

(3) は、まず計算の方法をしっかりと理解してください。ここで注意しておきたいのは、左から 3 本目の縦の路を上に進む確率は、右にも路が続くので $\frac{1}{2}$ となる点です。不要な路を消して考えた人は、この縦の路を上に行く確率を 1 としないように十分注意しましょう。あとは注意深く計算するだけです。