33 【難易度】 … |標準|

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) + 1 + \int_{-x}^x f(t)\,dt$$

(1) $f(0),\ f'(0)$ の値を求めよ．

(2) a, b を実数とし，$f(x)$ が $f(x) = e^x(a\sin x + b\cos x)$ の形で与えられるとき，a, b の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$ を示せ．

(4) $f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ \ y \geqq -1\ ,\ \ y \leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

【テーマ】：積分方程式・面積計算

方針

与えられた積分方程式から $f(0)$ の値を求めるためには，$x = 0$ を代入します．また，$f'(0)$ を求めるためには，両辺を x で微分してから $x = 0$ を代入します．本問は，前問の結果を使って次の設問を解答しなければならなくなるため，慎重に計算をしましょう．

♣ ♠

解答

(1) 与えられた式に $x = 0$ を代入すると，

$$\int_0^0 f(t)\,dt = f(0) + 1 + \int_0^0 f(t)\,dt \qquad \therefore\ \boldsymbol{f(0) = -1}\text{……(答)}$$

次に，与えられた式の両辺を x で微分すると， ☞ 公 式

$$f(x) = f'(x) + f(x) - f(-x)\cdot(-1) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = -f(-x)$$

この式に，$x = 0$ を代入して，

$$f'(0) = -f(0) = 1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{f'(0) = 1}\text{……(答)}$$

(2) $f'(x) = e^x(a\sin x + b\cos x) + e^x(a\cos x - b\sin x) = e^x\{(a-b)\sin x + (a+b)\cos x\}$ であり，

$$f(0) = b,\ f'(0) = a + b$$

であるから，(1) の結果より，

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases} \text{……(答)}$$

(3) **【証明】**

部分積分法で計算すると，

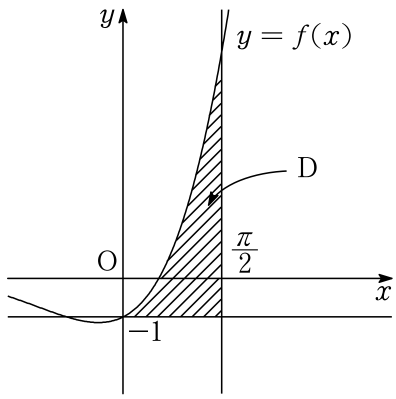
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \Big[\,e^x(-\cos x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$$

よって，示された． **(証明終)……(答)**

(4) (2) より,

$$f(x)=e^x(2\sin x-\cos x),\ f'(x)=e^x(3\sin x+\cos x)$$

であるから, $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $f'(x)>0$ となるので, $y=f(x)$ はこの区間で単調増加である.
よって, 領域 D を図示すると図の斜線部分（境界線上の点を含む）となる. したがって, 求める面積 S は,



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)-(-1)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{e^x(2\sin x-\cos x)+1\}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx+\frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx+2+\frac{\pi}{2} \quad (\because\ (3)) \end{aligned}$$

で表される. ここで, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} I &= \Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx \\ &= -1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx \\ &= -1+\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx \\ &= -1+e^{\frac{\pi}{2}}-I \end{aligned}$$

したがって,

$$2I=e^{\frac{\pi}{2}}-1 \iff I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$$

ゆえに, 求める面積 S は,

$$S=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+2+\frac{\pi}{2} \iff \boldsymbol{S=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+\pi+3}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

誘導が丁寧なので, 比較的解きやすい問題です. しかし, 前問の結果を使うので計算間違いは命取りです. 正確な計算力が要求されています. また, (4) では, 簡単なグラフをかいてから面積を計算しましょう. (3) の結果を用いれば計算量を減らすことができるので, 少し楽になります.

公式 **【微分と積分の関係】**

a を定数. x は t に無関係な変数. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする.

(i) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

(ii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$