36 【難易度】 … (1), (2) 標準, (3) 難

次の極限値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}$ $(a \geqq 1)$ （神戸商大）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$ $(a>0)$ （名古屋大）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$ （北海道大）

【テーマ】：数列の極限・関数の極限

方針

(1) は，a が整数か整数でないかで極限値が変わってくるので，場合分けを行います．a が整数でないときは，$[a]^n$ は a^n に比べてゴミみたいな物（凄く小さいという意味）であるという発想が必要です．
(2) は，a が 1 より大きいか否かで場合分けを行います．このときも，$a>1$ であれば，a^n は a^{2n} に比べてゴミみたいな物です．
(3) は，ガウス記号をどのように処理するかがポイントです．$\dfrac{n}{3}$ の小数部分を α として，ガウス記号をはずしましょう．あとは，$\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}$ の極限ですが，このままでは計算できないので，まず $\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n$ の極限を考えます．なぜなら，n が十分大きいときは，$\sqrt{n^2+a} \fallingdotseq n$ となるので，不定形を作ろうという発想です．

♣ ♠

解答

(1)

（ i ） a が整数のとき，$[a]^n=[a^n]$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=1$

（ii） a が整数ではないとき，a の整数部分を A すなわち $[a]=A$ とおく．

ここで，一般に実数 x に対して，$[x] \leqq x < [x]+1$ が成り立つので，

$[x]>x-1$ であり，$[x]$ と $x-1$ が同符号であれば，$\dfrac{1}{[x]}<\dfrac{1}{x-1}$

が成り立つ．したがって，

$$0 \leqq \frac{[a]^n}{[a^n]} < \frac{A^n}{a^n-1} = \frac{\left(\dfrac{A}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a^n}}$$

となり，$\dfrac{A}{a}$ は 1 より小さい正の数で，$a>1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{A}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a^n}}=0$ となる．

よって，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=0$

以上より，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=\begin{cases}\mathbf{1} & \text{（}\boldsymbol{a}\text{ が整数）}\\ \mathbf{0} & \text{（}\boldsymbol{a}\text{ が整数でない）}\end{cases}$$ ……(**答**)

(2)

（ i ） $0<a \leqq 1$ のとき，$0<a^{2n} \leqq a^n$ であるから，

$$\log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2a^n = \log 2 + n\log a\ ,\quad \log(a^n+a^{2n}) > \log a^n = n\log a$$

となるので，

$$n\log a < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2 + n\log a \iff \log a \leqq \frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) \leqq \frac{\log 2}{n} + \log a$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log 2}{n}+\log a\right)=\log a$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = \log a$$

（ii） $a>1$ のとき，$a^{2n} \geqq a^n > 0$ であるから，

$$\log a^{2n} < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2a^{2n} \iff 2n\log a < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2 + 2n\log a$$

$$2\log a < \frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) \leqq \frac{\log 2}{n} + 2\log a$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log 2}{n}+2\log a\right)=2\log a$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = 2\log a$$

以上より，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = \begin{cases} \boldsymbol{\log a} & \boldsymbol{(0<a\leqq 1)} \\ \boldsymbol{2\log a} & \boldsymbol{(a>1)} \end{cases} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) $\dfrac{n}{3}$ の小数部分を α $(0\leqq\alpha<1)$ とおくと，

$$\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n = \sqrt{n^2+\frac{n}{3}-\alpha}-n = \frac{n^2+\frac{n}{3}-\alpha-n^2}{\sqrt{n^2+\frac{n}{3}-\alpha}+\left(n+\frac{1}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{3n}-\frac{\alpha}{n}}+1} \to \frac{1}{6} \quad (n\to\infty)$$

ここで，n が自然数のとき，加法定理を用いると，

$$\sin 2\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)\cos 2n\pi - \cos\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)\sin 2n\pi$$

$$= \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$$

が成り立つので，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin 2\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right) = \sin\left(2\pi\times\frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1), (2) は，$n\to\infty$ のとき，r^n の極限値を計算する際は，r が 1 より大きいかどうかに注意する必要があるということを思い出しましょう．

(3) は難問です．まずガウス記号をどのように処理するかという問題と，極限値をどのように計算すればよいかを考えるのに非常に時間を費やすと思います．方針 でも述べているように，n が十分大きいときは，$\sqrt{n^2+a} \fallingdotseq n$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right)$ のように不定形にして極限を計算します．あとは，加法定理を利用すれば問題の形と同じになることが示されるので，めでたく極限値が計算できるというわけです．