4 （′02　京都大） **【難易度】** … 標準

4 個の整数 1, a, b, c は $1<a<b<c$ をみたしている．これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという．a, b, c の値を求めよ．

【テーマ】：整数問題（絞込み）

方針

4 個の整数で作ることができる和をすべて書き出して，その大小関係を調べてみます．すると，大小関係が不明なものが出てくるので，その大小で場合分けを行いましょう．また，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値は，$1+a$ の値を基準に考えるとよいでしょう．

解答

4 個の整数 1, a, b, c から異なる 2 個を取り出して和を作ると，

$$1+a,\quad 1+b,\quad 1+c,\quad a+b,\quad a+c,\quad b+c$$

の 6 数ができる．さらに，$1<a<b<c$ であることから，

$$1+a<1+b<1+c \text{ かつ } a+b<a+c<b+c$$

が成り立つことがわかる．

ここで，$1+a<b+c$ であることは明らかなので，$1+c$ と $a+b$ の大小関係で場合分けを行う．

（i） $1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$

（ii） $1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$

（iii） $1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$

よって，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値が得られるためには，次のようになればよい．

$$\text{(i)}\ \begin{cases} 1+b = (1+a)+1 & \cdots\cdots ① \\ 1+c = (1+a)+2 & \cdots\cdots ② \\ a+b = (1+a)+3 & \cdots\cdots ③ \\ a+c = (1+a)+4 & \cdots\cdots ④ \\ b+c = (1+a)+5 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

①～③ より，$a=3$, $b=4$, $c=5$ を得る．これらは，④, ⑤ も満たす．

$$\text{(ii)}\ \begin{cases} 1+b = (1+a)+1 & \cdots\cdots ⑥ \\ a+b = (1+a)+2 & \cdots\cdots ⑦ \\ 1+c = (1+a)+3 & \cdots\cdots ⑧ \\ a+c = (1+a)+4 & \cdots\cdots ⑨ \\ b+c = (1+a)+5 & \cdots\cdots ⑩ \end{cases}$$

⑥～⑧ より，$a=2$, $b=3$, $c=5$ を得る．これらは，⑨, ⑩ も満たす．

（iii）
$$\begin{cases} 1+b &= (1+a)+1 \quad \cdots\cdots \quad ⑪ \\ 1+c &= (1+a)+2 \quad \cdots\cdots \quad ⑫ \\ a+b &= (1+a)+2 \quad \cdots\cdots \quad ⑬ \\ a+c &= (1+a)+3 \quad \cdots\cdots \quad ⑭ \\ b+c &= (1+a)+4 \quad \cdots\cdots \quad ⑮ \end{cases}$$

⑪〜⑬ より，$a=2, b=3, c=4$ を得る．これらは，⑭, ⑮ も満たす．

ゆえに，（ i ）〜（iii）より，求める a, b, c の値は，

$\boldsymbol{(a, b, c)=(3, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 3, 4)}$……**（答）**

である．

◇ ♡

解説

『$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値が得られる』という部分をどのように表現するかがポイントです．**解答**では，$1+a$ の値を基準として 1 ずつ大きい値になるようにしました．地道ですがこの方法が一番確実です．そうすると 3 つの未知数を含む式が 5 つできます．式が余分なので，このような場合は，まず 3 つの方程式で a, b, c を求めて，これらが残りの 2 式を満たしていることを確認するという方法をとります．

$1+c$ と $a+b$ の大小関係が不明なので，最初に作った 2 つの不等式をつなげるために，場合分けが必要になるという点をしっかり理解しておきましょう．