

17 ('03 北海道大)

【難易度】…標準

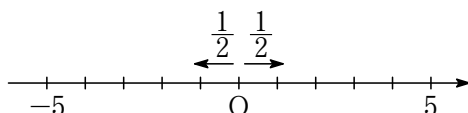
点 P は数直線上を原点 O を出発点として、確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み、または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

- (1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ。
- (2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ。
- (3) P が 6 回目の移動が終わった時点で、一度も O に戻っていない確率を求めよ。

【テーマ】: 移動の確率

方針

反復試行の確率を利用します。(2) では、 $|X(7)|$ のとり得る値をすべて書き出して地道に確率を計算します。

解答

- (1) 8 回中 x 回右へ進むとすれば、左へは $8 - x$ 回進むので、8 回の移動で 2 の位置にくるためには

$$x + (-1) \cdot (8 - x) = 2 \quad \therefore x = 5$$

であることから、右へ 5、左へ 3 移動すればよい。よって、求める確率は、

$${}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32} \dots \dots (\text{答})$$

- (2) $|X(7)|$ のとり得る値は、1, 3, 5, 7 であり、それらの値をとる確率をそれぞれ $P(1)$, $P(3)$, $P(5)$, $P(7)$ とする。 $|X(n)| = \pm X(n)$ であることを考慮にいれて、(1) と同様にそれぞれの確率を求めると、

$$P(1) = 2 \times {}_7C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{35}{64}$$

$$P(3) = 2 \times {}_7C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{21}{64}$$

$$P(5) = 2 \times {}_7C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{7}{64}$$

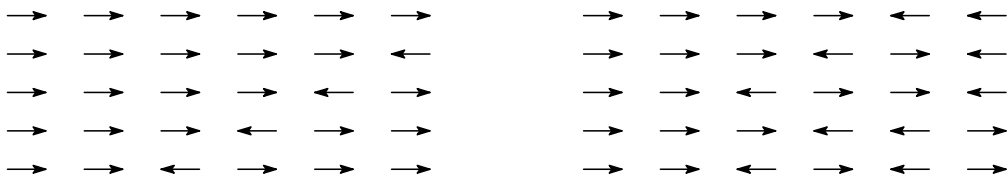
$$P(7) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{64}$$

よって、求める期待値を E とすると、

$$\begin{aligned} E &= 1 \times \frac{35}{64} + 3 \times \frac{21}{64} + 5 \times \frac{7}{64} + 7 \times \frac{1}{64} \\ &= \frac{35 + 63 + 35 + 7}{64} = \frac{35}{16} \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 右への移動を \rightarrow , 左への移動を \leftarrow で表すことにする .

1 回目の移動が \rightarrow のときは ,



の 10 通りがあり , 1 回目の移動が \leftarrow のときも同様に 10 通りがある . ゆえに , 求める確率は ,

$$20 \times \frac{1}{2^6} = \frac{5}{16} \dots\dots (\text{答})$$



解説

(1) で方程式を用いて移動を考えた理由は , 8 回の移動で 2 の位置にくるための移動は右に 5 , 左に 3 という移動しかないということを示すためです .

(2) では , 絶対値が付いているので , 絶対値内が負の場合を考える必要があるので , 確率を求める際にそれぞれ 2 倍しています .

(3) では , 一度も 0 に戻ってこないで , 計算で求めると間違えてしまう可能性が大きく注意が必要です . 最初に右に行ったのなら , もう 0 には戻ってこられないので , 正の領域での移動を考えなければならないし , 最初に左に行ったのなら , 負の領域で考えなければなりません . 移動の確率が右も左も同じなので , 正の領域の移動を求めれば , 負の領域の移動も同様に考えることができ計算も楽になります .