22 （'09　大分大） 【難易度】 … 標準

座標平面上に 2 点 A(1, 3), B(5, −5) があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 (0, 5) から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求めよ．

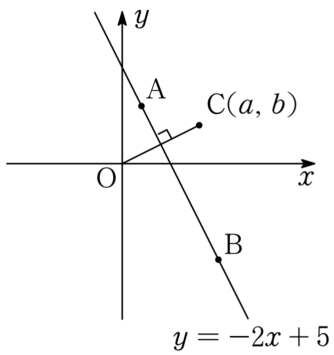
【テーマ】：円と直線の位置関係

方針

(1) は，対称点を求めるので，線分 OC の中点が直線 AB 上にあることと，直線 AB と OC が直交するという条件を用います．(2) は，外接円の中心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点であるということを用います．
(3) は，円外の点から接線を引きます．点 (0, 5) を通る直線を設定しましょう．

♣ ♠

解答



(1) C(a, b) とおくと，直線 AB の方程式は

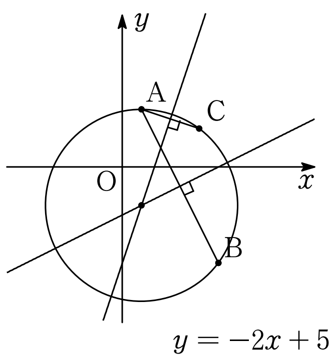
$$y=\frac{-5-3}{5-1}(x-1)+3 \iff y=-2x+5$$

であり，AB ⊥ OC となればよいので，直線 OC の傾きは $\frac{1}{2}$ である．
よって，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ より，$a=2b$ ……①
さらに，線分 OC の中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ が直線 AB 上にあればよいことから，

$$\frac{b}{2}=-2\cdot\frac{a}{2}+5 \iff b=-2a+10 \text{ ……②}$$

を得る．よって，①, ② より，$a=4$, $b=2$ となるので，点 C の座標は，**C(4, 2)**……(答)

(2) 線分 AB, AC の垂直二等分線の交点が △ABC の外接円の中心となる．



線分 AB の垂直二等分線は，

$$\text{点 }\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3-5}{2}\right)=(3, -1)$$

を通り，傾き $\frac{1}{2}$ であるから，

$$y=\frac{1}{2}(x-3)-1 \iff y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

である．同様にして，線分 AC の垂直二等分線は，

$$\text{点 }\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

を通り，傾き 3 であるから，

$$y=3\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2} \iff y=3x-5$$

である．よって，これら 2 直線の交点が外接円の中心となることから，

$$\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=3x-5 \iff x-5=6x-10 \qquad \therefore\ x=1$$

であり，このとき，$y=-2$ となる．ゆえに，外接円の中心の座標は $\mathbf{(1,\ -2)}$……(**答**)

さらに，外接円の半径は，点 $(1,\ -2)$ と $\mathrm{A}(1,3)$ の距離 5 に等しいので，外接円の方程式は，

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=25}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3)　求める接線は，点 $(0,5)$ を通ることから，傾きを m とすると，$y=mx+5$ とおくことができる．この直線が (2) で求めた円と接するための条件は，円の中心 $(1,\ -2)$ と直線 $y=mx+5$ の距離が円の半径 5 と等しくなるときであるから，

$$\frac{|m+2+5|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \iff |m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると，

$$12m^2-7m-12=0 \iff (3m-4)(4m+3)=0 \qquad \therefore\ m=\frac{4}{3},\ -\frac{3}{4}$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+5} \\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+5} \end{cases}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

円と直線がテーマになっている非常に標準的な問題です．対称点の求め方，外接円の求め方，円外から引いた接線の求め方など重要な問題が並んでいるので，確実にマスターしてください．なお，(3) は別解として，円上の点 (a,b) をとり，この点での接線

$$(a-1)(x-1)+(b+2)(y+2)=25$$

が点 $(0,5)$ を通るという条件から

$$-(a-1)+7(b+2)=25$$

を得て，点 (a,b) が円上の点なので，$(a-1)^2+(b+2)^2=25$ を得ることから，連立方程式を解いても求まりますが，計算量が多くなることを考えれば本解を使った方が計算間違いの可能性も低く楽でしょう．

