23 （'00　京都大） **【難易度】** … 標準

関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ で定める．

（1） $y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ．

（2） (1) で求めた法線と x 軸および $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(1) は基本問題なので，完答しましょう．(2) で面積を求める際に工夫が必要です．

♣ ♠

解答

（1） $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ より，$x=1$ における法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)$$

となる．$f'(1)=\frac{1}{2}$ であり，

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

より，$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ となり，
t と θ の対応は，右の表のようになる．
よって，

t	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，接線の方程式は，

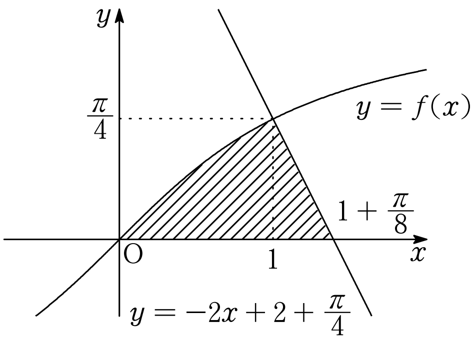
$$y=-2(x-1)+\frac{\pi}{4} \iff \boldsymbol{y=-2x+2+\frac{\pi}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $f'(x)>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは単調増加である．よって，求める面積は下図斜線部分となる．

(1) で求めた法線と x 軸との交点の x 座標は，

$$0=-2x+2+\frac{\pi}{4} \iff x=1+\frac{\pi}{8}$$

となるので，求める面積を S とすると，



$$S=\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\Big[\,xf(x)\,\Big]_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,dx+\frac{\pi^2}{64}$$
$$=f(1)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx+\frac{\pi^2}{64}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\Big[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\Big]_0^1+\frac{\pi^2}{64}\quad(\because\ (1))$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，基本問題ですから完答できなくてはいけません．特に，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の計算は頻出ですから，必ずできるようになっておきましょう．

(2) は，関数 $y=f(x)$ のグラフを考えなければいけませんが，高校の知識では単調増加であることを示して大まかにかけていれば十分でしょう．実は，関数 $f(x)$ は $\tan x$ の逆関数として与えられるので，高校では学習しません．したがって，本問のポイントになる部分は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の計算にあります．部分積分法を行い，

$$\{\log(1+x^2)\}' = \frac{2x}{1+x^2}$$

が成り立つことをうまく利用すれば，計算できます．