

33 (一橋大・改)

【難易度】…標準

整式  $x^n$  を整式  $x(x-1)^2$  で割ったときの余りを求めよ。ただし、 $n$  は正の整数とする。

【テーマ】：整式の除法と微分法

方針

3次式で割った余りは、2次式以下なので、余りを  $ax^2 + bx + c$  とおき、商は次数がわからないので  $Q(x)$  とおいて式を作ります。方程式  $x(x-1)^2 = 0$  の解に重解が含まれるので、両辺を微分しましょう。

解答

$x^n$  を  $x(x-1)^2$  で割ったときの商を  $Q(x)$ 、余りを  $ax^2 + bx + c$  とおくと、

$$x^n = x(x-1)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。

① に  $x = 0, 1$  を代入すると、それぞれ

$$\begin{cases} 0 = c & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = a + b + c & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。また、①の両辺を  $x$  で微分すると、

$$nx^{n-1} = (x-1)^2 Q(x) + 2x(x-1)Q(x) + x(x-1)^2 Q'(x) + 2ax + b$$

となるので、この式に  $x = 1$  を代入して、

$$n = 2a + b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を得る。②-④より、これを解いて

$$a = n - 1, \quad b = 2 - n, \quad c = 0$$

ゆえに、求める余りは、 $(n-1)x^2 + (2-n)x \cdots \cdots$ (答)

解説

重解をもつタイプでは、微分が利用できます。理系の方は、数学Ⅲで積の微分法を学習するので大丈夫だと思いますが、文系の人や理系でもまだ未学習の方は、次の積の微分の公式を知っておくと便利です。特に、文系の方は数学Ⅲだから覚えなくていいだろうという意識をもつのではなく、本問のような問題が出たときに使える公式なので、必ず知っておきましょう。

【積の微分法】

$u, v, w$  は  $x$  の関数であるとする。このとき、次の式が成り立つ。

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$