34 【難易度】 … 標準

$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x-3a^3$ が直線 $y=mx$ と原点以外で接しているとする．

(1)　$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　m を a を用いて表せ．

(3)　$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)\geqq 2^{12}$ をみたす最小の自然数 a を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) の接線が原点を通るときを考えて，m の値を求めます．

♣ ♠

解答

(1)　$f'(x)=3x^2-2ax-a^2$ であるから，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y=(3t^2-2at-a^2)(x-t)+t^3-at^2-a^2t-3a^3$$
$$=(3t^2-2at-a^2)x-2t^3+at^2-3a^3$$

よって，接線の方程式は，$\boldsymbol{y=(3t^2-2at-a^2)x-2t^3+at^2-3a^3}$……(**答**)

(2)　(1) で求めた接線の方程式が原点を通るとき，

$$-2t^3+at^2-3a^3=0$$
$$2t^3-at^2+3a^3=0$$
$$(t+a)(2t^2-3at+3a^2)=0$$

$2t^2-3at+3a^2=0$ の判別式を D とすると，$a>0$ であることから $D=9a^2-24a^2=-15a^2<0$ となる．t は実数であるから，$t=-a$ のみが解となる．このとき，接線の方程式は，

$$y=(3a^2+2a^2-a^2)x \iff y=4a^2x$$

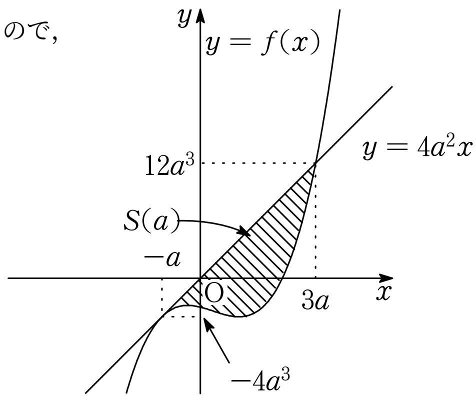
これが $y=mx$ と一致すればよいことから $\boldsymbol{m=4a^2}$……(**答**)

(3)　$y=4a^2x$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標は，

$$x^3-ax^2-a^2x-3a^3=4a^2x \iff x^3-ax^2-5a^2x-3a^3=0 \iff (x+a)^2(x-3a)=0$$

すなわち，$x=-a,\ 3a$ である．$a>0$ であることから $-a<3a$ なので，

$$S(a)=\int_{-a}^{3a}\{4a^2x-(x^3-ax^2-a^2x-3a^3)\}\,dx$$
$$=-\int_{-a}^{3a}(x+a)^2(x-3a)\,dx$$
$$=-\frac{-1}{12}\{3a-(-a)\}^4$$
$$=\frac{64}{3}a^4$$



これより，$\dfrac{64}{3}a^4\geqq 2^{12}$ すなわち $a^4\geqq 192$ が成り立つので，

$$3^4 = 81, \quad 4^4 = 256$$

であることから，求める最小の自然数 a の値は $\boldsymbol{a = 4}$……(**答**)

◇ ♡

解説

(1) は, 接線の方程式を求める基本問題です．この結果を使って (2) を計算します．これは, $y = mx$ が $y = f(x)$ に接すると考えるのではなく，曲線の接線が原点を通るときは，その接線が $y = mx$ と一致すると考えるのです．頻出の考え方なので必ずできるようになっておきましょう．

(3) において，$y = 4a^2x$ と $y = f(x)$ の交点を求めるときは，$x = -a$ で接することから

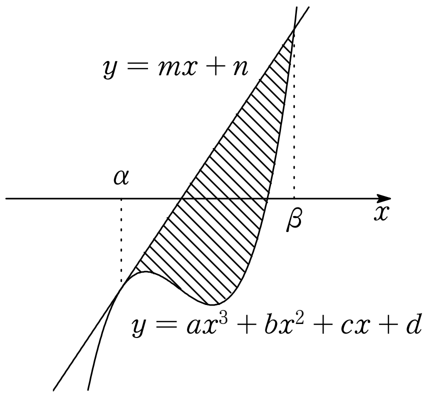
$x^3 - ax^2 - 5a^2x - 3a^3$ は $(x+a)^2$ を因数にもつ

ことがわかります．このことから，$(x+a)^2(x+b) = 0$ (3 次の係数は 1 であることに注意) の形に因数分解できるはずなので，展開したときの定数項を比較することから $b = -3a$ であることは容易に求まります．このように考えれば，暗算で因数分解をすることができます．

【面積の計算】

3 次関数のグラフと直線が接するとき，それらによって囲まれる部分の面積を S とすると，次式が成り立つ．
なお，接点の x 座標を α とし，その他の交点の x 座標を β とする．

$$S = \left| \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx \right| = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$



➾**注**：3 次の係数 a を忘れないようにしましょう．

