35 【難易度】… 標準

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\,dx$$

このとき，次の各問いに答えよ．

（1） a_1, a_2 を求めよ．

（2） n が奇数のとき，$a_n = 0$ となることを示せ．

（3） n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ．

（4） a_{10} を求めよ．

【テーマ】：三角関数の積分

方針

n が奇数のときは，定積分の値は 0 になり，偶数のときは漸化式を作ります．誘導されています．漸化式を作るときは，部分積分法を利用します．

♣ ♠

解答

（1）

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos x\,dx \\ &= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi} \\ &= \mathbf{0} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} dx \\ &= 2\Big[x\Big]_0^{\pi} \\ &= \mathbf{2\pi} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

（2） **【証明】**

n が奇数のとき，$f(x) = \sin^n x$ とおくと，

$$f(-x) = \sin^n(-x) = (-\sin x)^n = -\sin^n x = -f(x)$$

となるので，$y = f(x)$ は奇関数であり，同様にすると，$y = \cos^n x$ は偶関数であることが示されるので，

$$a_n = 2\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx$$

となる．ここで，$x - \frac{\pi}{2} = t$ とおくと，$dx = dt$ であり，右の表より，

x	0	$\to$	π
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)^n\,dt \\ &= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

（☞ $\sin^n t$ は奇関数なので，定積分の値は 0 になる）

よって，題意は示された． **(証明終)**……(答)

(3) n が偶数のとき，$y=\sin^n x+\cos^n x$ は偶関数となるので，

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\
&= 2\int_0^{\pi}(\sin x\sin^{n-1}x+\cos x\cos^{n-1}x)\,dx \\
&= 2\Big[-\cos x\sin^{n-1}x+\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\pi} \\
&\qquad -2\int_0^{\pi}\left\{-(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}x-(n-1)\sin^2 x\cos^{n-2}x\right\}dx \\
&= 2(n-1)\int_0^{\pi}\left\{(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x+(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\right\}dx \\
&= 2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)\,dx-2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\
&= (n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n
\end{aligned}$$

ゆえに，$na_n=(n-1)a_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}}$……**(答)**

(4) (1), (3) の結果より

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\
&= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\text{……(答)}
\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

本問では a_n を求めることまでは問うてないが，実は (3) で求めた漸化式から a_n を求めることができる．式変形がちょっと難しいが，参考までに次のような式変形の仕方も知っておいてもらいたい．

$n=2m$ のとき，(3) で得られた漸化式から，

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\
&= \frac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots4\cdot3}{\{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots6\cdot4\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{\dfrac{(2m)!}{2\cdot1}}{\{2^{m-1}m(m-1)(m-2)\cdots3\cdot2\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}\{m(m-1)(m-2)\cdots3\cdot2\}^2}\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}(m!)^2}\pi
\end{aligned}$$

となるので，$m=\dfrac{n}{2}$ であることから，$a_n=\dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi$ である．

ゆえに，これと (2) の結果から，

$$\left\{\begin{array}{ll}\textbf{n が奇数のとき，} & \boldsymbol{a_n=0} \\ \textbf{n が偶数のとき，} & \boldsymbol{a_n=\dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi}\end{array}\right.\quad\text{……(答)}$$

となるのである．これを用いても (4) は解答することができる．

$$a_{10}=\frac{10!}{2^8\cdot(5!)^2}\pi=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2^8\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\pi=\boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\text{……(答)}$$