

39 ('06 神戸大)

【難易度】…標準

不等式

$$-\sin x \leq y \leq \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

で定義される xy 平面内の領域を K とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) K の面積を求めよ.
- (2) K を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

【テーマ】: 回転体の体積

方針

面積や体積を求める問題では, グラフをかいて考えます. なぜなら本問のように考えている領域が回転軸を含んでいると単純に行かないからです. 領域 K は x 軸をまたいでいるので, x 軸のまわりに回転させるときは注意が必要です.

解答

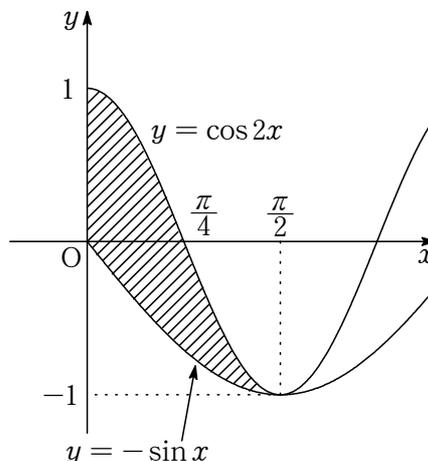
- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において,

$$\cos 2x - (-\sin x) = 1 - 2\sin^2 x + \sin x = -(2\sin x + 1)(\sin x - 1) \geq 0$$

であるから, 領域 K は右図の斜線部分になる.

その面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos 2x - (-\sin x)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



- (2) $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos 2x \\ \iff (2\sin x - 1)(\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

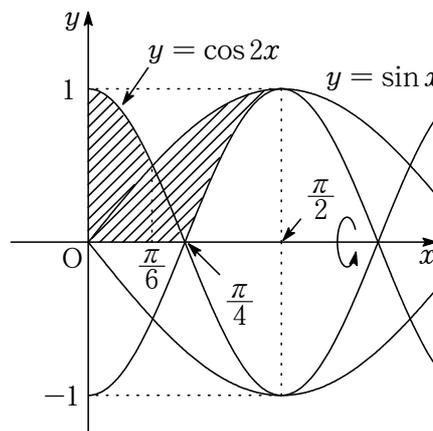
よって, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{6}$ である.

領域 K を x 軸のまわりに 1 回転させるときにできる回転体を xy 平面で切りとってできる図形で, $y \geq 0$ にある部分は, 右図の斜線部分のようになる.

この斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積が求める体積となる. すなわち,

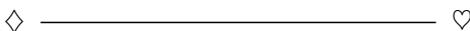
$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ では, } y = \cos 2x \text{ を,} \\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ では } y = \sin x \text{ を,} \\ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ では } y = \sin x \text{ と } y = -\cos 2x \text{ を} \end{aligned}$$

それぞれ x 軸のまわりに 1 回転させると考えればよい.



ゆえに、求める回転体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi \cos^2 2x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 2x dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\
 &= \frac{\pi}{16} (2\pi + 3\sqrt{3}) \dots \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$



解説

回転体の体積を求める問題です。 x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めるときは、回転させる図形が x 軸を含んでいるかどうか重要になってきます。本問のように x 軸を含んでいるときは、 x 軸よりも下にある部分を x 軸に関して対称移動させた図形を考えることが大切です。