

22 ( '09 福井大 )

【難易度】… 難

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  に関して、以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{n}{(n+1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 一般項  $a_n$  を求めよ。(2) 2 以上の自然数  $m$  に対して  $\sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{m-k}$  を求めよ。(3) 不等式  $\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。

【テーマ】：隣接 2 項間漸化式

方針

(1) は、予想して数学的帰納法で証明するという方法もありますが、うまく式変形することができれば、容易に求められます。(2) は、二項定理が使えるかどうかポイントになります。(3) は、数学的帰納法で証明しましょう。

解答

(1)  $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$  であるから、与えられた漸化式を変形すると、

$$a_{n+1} = a_n - \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \iff a_{n+1} - \frac{1}{(n+1)!} = a_n - \frac{1}{n!}$$

となるので、

$$a_n - \frac{1}{n!} = a_1 - \frac{1}{1!} = 0 \quad \therefore a_n = \frac{1}{n!} \dots \dots (\text{答})$$

(2)  $m \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(m-k)!} &= \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \\ &= \frac{1}{m!} \left( \sum_{k=0}^m {}_m C_k - {}_m C_0 - {}_m C_m \right) \\ &= \frac{1}{m!} ((1+1)^m - 2) \\ &= \frac{2^m - 2}{m!} \quad (m \geq 2) \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 【証明】

$$\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}} \dots \dots \textcircled{1}$$

数学的帰納法で証明する。

(i)  $n = 1$  のとき、 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$  であるから、

$$(\text{左辺}) = 2, \quad (\text{右辺}) = \frac{4}{\sqrt{3}} > 2$$

であるから、 $\textcircled{1}$  は成り立つ。(ii)  $n = k$  のとき、すなわち

$$\frac{(a_k)^2}{a_{2k}} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \iff \frac{(2k)!}{(k!)^2} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \dots \dots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定する. ②の両辺に  $\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} > 0$  をかけて,

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{2 \cdot 4^k \sqrt{2k+1}}{k+1}$$

ここで,

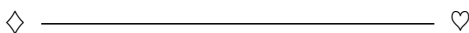
$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}} - \frac{2 \cdot 4^k \sqrt{2k+1}}{k+1} &= \frac{2 \cdot 4^k \{2(k+1) - \sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}\}}{\sqrt{2k+3}(k+1)} \\ &= \frac{2 \cdot 4^k (\sqrt{4k^2+8k+4} - \sqrt{4k^2+8k+3})}{\sqrt{2k+3}(k+1)} > 0 \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2} < \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$

が成り立ち,  $n = k + 1$  のときも ① は成り立つ.

以上より, 数学的帰納法によってすべての自然数  $n$  に対して ① が成り立つことが示された. (証明終)



#### 解説

(1) は, 予想して帰納法で証明する方法や解答のように式変形する方法, さらには  $\{a_n\}$  の階差数列を考える方法など様々な方法があります.

(2) は, 式の形から二項定理が想像できたかどうかポイントになります.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k}$$

なので,  $a = b = 1$  として

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k = 2^n$$

を得ることができます.

(3) は, 数学的帰納法で証明しますが,  $n = k + 1$  のとき成り立つことを示す際に計算がやや複雑なので, 計算ミスと解答の書き方に注意しましょう.