

33 ('99 一橋大)

【難易度】…標準

曲線  $y = x^3 + ax^2 + b$  は直線  $l: y = -x + 3$  と第 1 象限の点 P で交わり, P における曲線の接線と  $l$  は直交する.

- (1)  $a$  の範囲を求めよ.  
 (2)  $b$  の範囲を求めよ.

【テーマ】: 接線と法線

方針

点 P の  $x$  座標を  $t$  とおいて, 題意を満たすように式を作ります.

解答

- (1)  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  とおき, 点 P が直線  $l$  上にあるので,  $P(t, -t + 3)$  とおく. このとき, 点 P は第 1 象限にあることから  $0 < t < 3$  である.

点 P における接線が直線  $l$  と直交するので, 点 P における接線の傾きは 1 となる. したがって,

$$f'(t) = 1 \iff 3t^2 + 2at - 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで,  $\textcircled{1}$  が  $0 < t < 3$  の間に実数解をもてばよい.  $f(0) = -1 < 0$  であるから,  $0 < t < 3$  の間に実数解をもつための条件は,

$$f(3) > 0$$

ゆえに,

$$27 + 6a - 1 > 0 \iff a > -\frac{13}{3} \dots\dots(\text{答})$$

- (2)  $a$  が (1) の条件を満たせば,  $\textcircled{1}$  は  $0 < t < 3$  の間に実数解をもつ. これに加えて, 曲線  $y = f(x)$  が点 P を通れば, 題意の条件はすべて満たされるので,

$$t^3 + at^2 + b = -t + 3 \iff t^3 + at^2 + t + b - 3 = 0$$

ここで,  $\textcircled{1}$  より,  $at = \frac{1-3t^2}{2}$  であるから,

$$t^3 + t \cdot \frac{1-3t^2}{2} + t + b - 3 = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t + 3$$

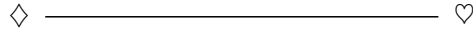
$g(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t + 3$  とおいて,  $0 < t < 3$  において,  $g(t)$  のとり得る値の範囲を求めればよい.

$$g'(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}$$

であるから,  $g'(t) = 0$  のとき,  $t = 1$  ( $\because 0 < t < 3$ ). よって, 増減表は次のようになる.

$t$	0	...	1	...	3
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	3	↘	2	↗	12

ゆえに,  $b$  のとり得る値は,  $2 \leq b < 12 \dots\dots(\text{答})$

**解説**

(1) で、 $l$  が点  $P$  における曲線の法線になる条件から  $a$  の範囲を求め、(2) で、 $y = f(x)$  と  $l$  が点  $P$  で交わることから  $b$  の範囲を求めます。少し考えにくいかもしれませんが、 $b$  の範囲を出すときは、① で  $a$  を消去して  $t$  の式を作るところがポイントです。あとは、点  $P$  が第 1 象限にあるという条件から  $t$  の範囲を求めておくことを忘れないようにしましょう。