34 （′09　九州大） 【難易度】…標準

k は 2 以上の自然数とする．「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，…，「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ．

(2)　p_{n+1} を p_n, M, N で表せ．

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ．

(4)　p_n を n と k で表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

漸化式を作って p_n を求めます．(3) では，k の偶奇で場合分けが必要です．

♣ ♠

解答

(1)　記録された n 個の数の和を X_n とする．題意より，偶数・奇数が取り出される確率はそれぞれ $\dfrac{M}{M+N}$，$\dfrac{N}{M+N}$ である．X_1 が偶数となるのは，偶数を取り出すときなので，

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{M}{M+N}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

X_2 が偶数となるのは，偶数のカードが 2 回，奇数のカードが 2 回取り出されるときで，

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+N}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　X_{n+1} が偶数になるのは，

（ｉ）　n 回目までの和が偶数で，次に偶数が出る

（ii）　n 回目までの和が奇数で，次に奇数が出る

ときであるから，

$$p_{n+1} = \frac{M}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}(1-p_n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　題意から，

$$M+N = 1+2+3+\cdots\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

である．ここで，k の偶奇で場合分けを行う．

（ｉ）　k が奇数のとき，

$$\begin{aligned} M-N &= (2+4+6+\cdots\cdots+(k-1)) - (1+3+5+\cdots\cdots+(k-2)+k) \\ &= (2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots\cdots+\{(k-1)-(k-2)\}-k \\ &= \frac{k-1}{2} - k = \frac{-k-1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{M-N}{M+N}=\frac{-\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}k(k+1)}=-\frac{1}{k}$$

（ii） k が偶数のとき，

$$\begin{aligned}M-N&=(2+4+6+\cdots\cdots+k)-(1+3+5+\cdots\cdots+(k-1))\\&=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots\cdots+\{k-(k-1)\}\\&=\frac{k}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{M-N}{M+N}=\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k(k+1)}=\frac{1}{k+1}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}=\begin{cases}-\dfrac{1}{k} & (k\text{ は奇数})\\ \dfrac{1}{k+1} & (k\text{ は偶数})\end{cases}}\quad\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) (2) で求めた式から，

$$p_{n+1}=\frac{M-N}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}\quad\cdots\cdots\ ①$$

$$\alpha\ =\frac{M-N}{M+N}\alpha+\frac{N}{M+N}\quad\cdots\cdots\ ②$$

① − ② より，

$$p_{n+1}-\alpha=\frac{M-N}{M+N}(p_n-\alpha)\cdots\cdots\ ③$$

一方 ② より，

$$\left(1-\frac{M-N}{M+N}\right)\alpha=\frac{N}{M+N}\quad\Longleftrightarrow\quad\alpha=\frac{1}{2}$$

であるから，③ 式は，次のようになる．

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n+1\right\}$$

ゆえに，(3) の結果から，

$$\boldsymbol{p_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n+1\right\} & (k\text{ は奇数})\\ \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n+1\right\} & (k\text{ は偶数})\end{cases}}\quad\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，n 回目までの状況と，$n+1$ 回目の状況で確率遷移図をかいて考えると状況が視覚的に捉えられるので立式しやすくなります．k での場合分けが必要になる理由は，$M-N$ の値が k の偶奇によって変わってくるためです．