37 （'07　岩手大） 【難易度】… 標準

行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

（1） 2 つの等式 $AT=TB$, $T^2=E$ を満たす 2×2 行列 T をすべて求めよ．

（2） B^2 と B^3 を求めよ．また，n を自然数とするとき，B^n を求めよ．

（3） n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

【テーマ】：行列の累乗

方針

(1) は，行列 T を成分表示して成分計算を行います．(2) は，B^n を類推し数学的帰納法で証明します．(3) は，(1), (2) の結果を用います．

♣ ♠

解答

（1） $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AT=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$TB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$AT=TB$ より，

$$\begin{cases} 2a-c=a & \cdots\cdots ① \\ 2b-d=a+b & \cdots\cdots ② \\ a=c & \cdots\cdots ③ \\ b=c+d & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①, ③ より，$a=c$ ……Ⓐ

②, ④ より，$b=a+d$ ……Ⓑ

一方 $T^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ であり，$T^2=E$ より，

$$\begin{cases} a^2+bc=1 & \cdots\cdots ⑤ \\ b(a+d)=0 & \cdots\cdots ⑥ \\ c(a+d)=0 & \cdots\cdots ⑦ \\ bc+d^2=1 & \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

⑥ より，$b=0$ のとき，⑤, ⑧ より，$a=\pm1$, $d=\pm1$ となるが，Ⓑ より，$a=-d$ であるから，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 1,\ -1),\ (-1,\ 0,\ -1,\ 1)$$

また，⑦ より $c=0$ のとき，⑧ より $d=\pm1$ となり，Ⓐ より，$a=0$, Ⓑ より，$b=d$ となるがこれは ⑥ を満たさず不適．

さらに，⑥, ⑦ において，$a+d=0$ のとき，Ⓑ より，$b=0$ であり，⑤, ⑧ から，$a=\pm 1,\ d=\pm 1$ となるので，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 1,\ -1),\ (-1,\ 0,\ -1,\ 1)$$

以上より，求める行列 T は，

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

となるので，$B^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と類推できる．

（i） $n=1$ のとき，明らかに成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，$B^k=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であると仮定する．

$$B^{k+1}=B^kB=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも成り立つので，数学的帰納法により正しいことが示された．

$$\therefore\quad \boldsymbol{B^n}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (1) より，$A=TBT^{-1}$ であるから，$A^n=TB^nT^{-1}$ を得る．また，$T^2=E$ より，$T=T^{-1}$ であるから，

$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix}\cdots\cdots Ⓒ$$

$T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$T=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より Ⓒ と同じになる．以上より，

$$\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{n+1} & \boldsymbol{-n} \\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{-n+1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

成分計算を行うときは，立式したすべての式を満たすことを確認する必要があります．条件を満たしていないものまで答えにしないように注意しましょう．行列 B は上三角行列で累乗計算は頻出です．確実にできるようにしておきましょう．