1 ('10　北海道大) 【難易度】… 標準

2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする．

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ．

(2)　A, B, C の 3 人が，A, B, C, A, B, C, A, …… の順に，このくじ引きを行うとする．1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ．B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

くじを順番に引くということは，一列に並べることと同じことです．条件に合う場合の数を計算します．

♣　♠

解答

当たりくじを○，はずれくじを×で表すこととする．

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出るということは，

$$\underbrace{\times\times\times\ \cdots\ \times}_{(n-1)\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\ \cdots\ \times\bigcirc\times\ \cdots\ \times}_{(102-n)\text{ 個}}$$

上記のように○×を並べる方法は，最初の○が出た後は，どこで○が出ても良いので，$102-n$ 通りあり，全ての○×の並べ方は ${}_{102}\mathrm{C}_2=5151$ 通りであるから，求める確率は，

$\boldsymbol{\dfrac{102-n}{5151}}$ ……**(答)**

(2)　A が k $(1\leqq k\leqq 34)$ 回目に当たりくじを引くとする．

$$\begin{array}{l}\mathrm{A\,B\,C}\ \cdots\ \mathrm{A\,B\,C}\ \cdots\ \mathrm{A\,B\,C}\\ \underbrace{\times\times\times\ \cdots}_{3(k-1)\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\times\ \cdots\ \times\times\times}_{(104-3k)\text{ 個}}\end{array}$$

上記のように○×を並べる方法は，A が最初の○を引いた後は，誰が○を引いても良いので，$104-3k$ 通りある．よって，A が k 回目に当たりくじを引く確率は，

$$\frac{104-3k}{5151}$$

である．したがって，A が当たりくじを引く確率は，

$$\sum_{k=1}^{34}\frac{104-3k}{5151}=\frac{104\cdot 34-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35}{5151}$$

$$=\boldsymbol{\frac{103}{303}}\text{ ……}\textbf{(答)}$$

B が k $(1\leqq k\leqq 34)$ 回目に当たりくじを引くときも同様に考える．

$$\begin{array}{l}\mathrm{A\,B\,C}\ \cdots\ \mathrm{A\,B\,C\,A}\ \cdots\ \mathrm{A\,B\,C}\\ \underbrace{\times\times\times\ \cdots\ \times}_{\{3(k-1)+1\}\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\times\ \cdots\ \times\times\times}_{(103-3k)\text{ 個}}\end{array}$$

上記のように○×を並べる方法は B が最初の○を引いた後は，誰が○を引いても良いので，$103-3k$ 通りある．よって，B が k 回目に当たりくじを引く確率は，

$$\frac{103-3k}{5151}$$

である．したがって，B が当たりくじを引く確率は，

$$\sum_{k=1}^{34}\frac{103-3k}{5151}=\frac{103\cdot 34-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35}{5151}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

C については，余事象の確率を考えて，

$$1-\left(\frac{103}{303}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{33}{101}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

くじを取り出すという問題ですが，本質的には，○×を一列に並べるという問題と同じです．それに気がつけば後は並べ方の方法を考えるだけです．最初の○が出るまでは×しか出ないので，並べ方は 1 通りになります．問題は最初の○が出た後になります．残りは○が 1 つで後は全て×になります．したがって，その並べ方はどこに○を置けばよいかを考えればよいだけなので，並べ方の総数は残った記号の数に一致します．(2) でも同様に考えますが，(2) では，A だけに着目して考えたいので，A が k 回目にくじを引くときを考えています．つまり，1 回目の A に○がくるとき，2 回目の A に○がくるとき … 34 回目の A に○がくるときを考えて全ての確率を和の法則によって加えればよいのです．B についても同様に考えることができます．C は同じように考えてもできますが，余事象を使う方が楽でしょう．もちろん，検算という意味で，A, B のときと同様の方法で求めても構いません．