11 （'74　京都大）　　**【難易度】** … やや難

正の定数 a, b に対し，不等式

$$4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$$

を考え，次の問いに答えよ．

（1）　$m > 0$ かつ m, n ともに整数であって，この不等式を満たすような m, n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ．

（2）　$a = 8, b = 9, m \geqq 9$ であるときは，上の不等式を満たす整数 m, n の組は $n^2 = 4m + 1$ を満たすことを証明せよ．

（3）（2）の場合の m, n の組のうち，n が最も大きいものを求めよ．

【テーマ】：不等式を満たす整数の組

方針

(1) では，$\dfrac{a}{\sqrt{m}} \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{b}{m} \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす最小の整数 m を M として考えます．(2) では，n を偶数と奇数に分けて考えます．(3) では，(1), (2) の結果を利用します．

♣　♠

解答

（1）**【証明】**

$4m < n^2 < 4m + \dfrac{a}{\sqrt{m}} + \dfrac{b}{m}$ …… ①

$\dfrac{a}{\sqrt{m}} \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{b}{m} \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす最小の整数 m を M とすると，$m \geqq M$ を満たすすべての m で，① は

$$4m < n^2 < 4m + 1$$

となり，これを満たす整数 n は存在しないので，$0 < m < M$ となる．よって，m は有限個しかなく，これに対応する n も ① より有限個となる．以上より，題意は示された．**（証明終）**

（2）**【証明】**

$a = 8, b = 9$ のとき，

$$4m < n^2 < 4m + \frac{8}{\sqrt{m}} + \frac{9}{m} \leqq 4m + \frac{8}{3} + 1 = 4m + \frac{11}{3}\quad (\because \quad m \geqq 9)$$

n^2 は整数であるから，

$$n^2 = 4m + 1,\ 4m + 2,\ 4m + 3$$

である．

ここで，k を整数として，

$n = 2k$ のとき，　$n^2 = 4k^2$

$n = 2k + 1$ のとき，　$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$

となり，$n^2 = 4m + 2, 4m + 3$ とは表せない．したがって，$n^2 = 4m + 1$ を満たすことが示された．**（証明終）**

(3)　整数の組 (m, n) が存在するためには,

$$\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}>1$$

であればよく，このとき,

$$\frac{8}{\sqrt{m}}>1-\frac{9}{m}$$

$$8\sqrt{m}>m-9$$

$$m-8\sqrt{m}-9<0$$

$$(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-9)<0$$

$$\therefore\quad 0<\sqrt{m}<9$$

$$\therefore\quad 0<m<81$$

$m \geqq 9$ であるから，$9 \leqq m < 81$ である．このとき，$37 \leqq n^2 < 325$ であるから，これを満たす最大の整数 n は $n=17$ である．$n=17$ のとき，$m=72$ となるので，求める (m, n) の組合せは,

$(m, n)=(72, 17)$……(答)

◇　♡

解説

(1) は，方針が立てにくく感じたかもしれません．有限個しか存在しない，無限個存在するなどの証明は，よく出題される問題です．背理法を用いる場合が多くあるので，演習を積んでおきましょう．本問では，$m \geqq M$ を考えて，矛盾を導きました．(2) は，具体的に a, b, m の条件が与えられているので，n を偶奇に分けて考えれば，それほど難しくなく証明できます．(3) は，(m, n) の組が存在するための条件が $\dfrac{8}{\sqrt{m}}+\dfrac{9}{m}>1$ であることに気付けるかどうかがポイントとなります．