15 （'94　北海道大）　**【難易度】**… 標準

a を 0 でない実数とし，P を直線 $y=ax$ 上の原点 O 以外の点とする．1 次変換 f が次の条件 (イ) と (ロ) を満たすとする．

(イ)　f は点 $(1,\ 0)$ を点 $(2,\ 0)$ に移す．

(ロ)　$\mathrm{Q}=f(\mathrm{P})$ とすると，$\angle\mathrm{POQ}$ が直角となり，$\triangle\mathrm{POQ}$ の面積が OP の長さの 2 乗に等しい．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　f を表す行列 A を求めよ．

(2)　n を自然数とし，$a=1+\dfrac{1}{n}$ とおく．点 $(0,\ 1)$ の f による像の y 座標の絶対値を c_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{2}\right)^n$ を求めよ．

【テーマ】：１次変換

方針

点 P, Q の座標を設定しますが，点 Q の座標は，$\angle\mathrm{POQ}$ が直角であることを考慮します．

♣　♠

解答

(1)　条件 (イ) より，

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots ①$$

次に，$\mathrm{P}(s,\ as)$ $(s\neq 0)$ とおく．条件 (ロ) より Q は $y=-\dfrac{1}{a}x$ 上の点であるから，$\mathrm{Q}\left(t,\ -\dfrac{t}{a}\right)$ とおける．したがって，

$$A\begin{pmatrix}s\\as\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-\dfrac{t}{a}\end{pmatrix}\cdots\cdots ②$$

また，$\triangle\mathrm{POQ}=\mathrm{OP}^2$ より，

$$\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}^2$$

$$\therefore\ \ \mathrm{OQ}=2\mathrm{OP}\quad(\because\ \ \mathrm{OP}\neq 0)$$

$$\mathrm{OQ}^2=4\mathrm{OP}^2\iff t^2+\frac{t^2}{a^2}=4(s^2+a^2s^2)\iff \frac{t^2}{a^2}(a^2+1)=4s^2(a^2+1)$$

$a^2+1\neq 0$ であるから，

$$t^2=4a^2s^2\iff \frac{t}{s}=\pm 2a\cdots\cdots ③$$

①, ② より，

$$A\begin{pmatrix}1 & s\\0 & as\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & t\\0 & -\dfrac{t}{a}\end{pmatrix}$$

$\Delta\begin{pmatrix}1 & s\\0 & as\end{pmatrix}=as\neq 0$ より，逆行列が存在するので，

$$A=\begin{pmatrix}2 & t\\ 0 & -\dfrac{t}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & as\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{as}\begin{pmatrix}2 & t\\ 0 & -\dfrac{t}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}as & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{as}\begin{pmatrix}2as & -2s+t\\ 0 & -\dfrac{t}{a}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{t}{s}\\ 0 & -\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{t}{s}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -\dfrac{2}{a}\pm 2\\ 0 & \mp\dfrac{2}{a}\end{pmatrix}\quad\text{（複号同順）（∵　③）}$$

ゆえに，$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}2 & -\dfrac{2}{a}\pm 2\\ 0 & \mp\dfrac{2}{a}\end{pmatrix}}$ **（複号同順）**……（**答**）

(2) (1) から，

$$A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\dfrac{2}{a}\pm 2\\ 0 & \mp\dfrac{2}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{a}\pm 2\\ \mp\dfrac{2}{a}\end{pmatrix}\quad\text{（複号同順）}$$

ゆえに，$a=1+\dfrac{1}{n}$ のとき，

$$c_n=\left|\mp\frac{2}{a}\right|=\frac{2n}{n+1}$$

したがって，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{e}}\text{……（答）}$$

◇ ♡

解説

(1) では，2 点 P, Q の座標を具体的に設定して考えるとよいでしょう．ただし，最終的に s, t は消去する必要があるので，③ が必要になってきます．また，その際は ± を忘れないようにしましょう．(2) は，(1) ができれば基本問題なので，公式を忘れていた人は要チェックです！