20　('11　滋賀大)　**【難易度】** … 標準

座標平面上の点 $(1,0)$ を A とする．原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を中心とし半径が 1 の円周上の 2 点 P, Q は，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$，$\angle\mathrm{AOQ}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$，$0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ を満たす．また，点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を B とし，点 C を四角形 BPQC が平行四辺形になるように定める．ただし，点 P, Q の y 座標は正とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 C の座標を θ を用いて表せ．

(2)　四角形 BPQC の面積の最大値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

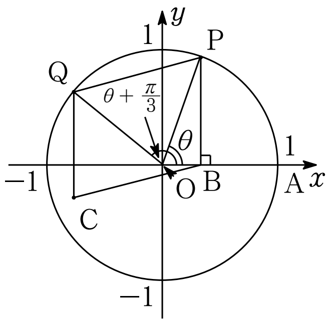
【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

点 C の座標を求めるときは，ベクトルを用います．

♣ ♠

解答



(1)　$\mathrm{PB}=\sin\theta$ であり，四角形 BPQC が平行四辺形であることから，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ である．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}\\&=\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)+(0,\,-\sin\theta)\\&=\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \ -\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\right)\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(2)　QC と x 軸の交点を H とすると，

$$\mathrm{H}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ \ 0\right)$$

であるから，

$$\mathrm{OH}=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

よって，四角形 BPQC の面積を $S(\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\mathrm{PB}\times\mathrm{HB}\\&=\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta\\&=\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\\&=\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{3}<2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\pi$ より，

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$$

$$\therefore\quad 0<\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

となるので，$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{5}{12}\pi$ のとき，最大値 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる．以上より，求める最大値とそのときの θ の値は，

$$\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \left(\theta = \frac{5}{12}\pi\right)} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

———— ♢ ———— ♡ ————

解説

点 C の座標をどのように求めるかですが，ベクトルを用いる方法が楽に求められる場合が多いです．本問ならば，点 Q の座標さえ分かれば，ベクトルを用いなくてもそれほど苦労しませんが，汎用性を高めるためベクトルを用いる解法を知っておきましょう．(2) では，面積を θ で表すことができれば，基本的な三角関数の最大値問題です．角を統一し，合成して求めましょう．