

26 ('01 東京水産大)

【難易度】… 標準

初項 $a_1 = p$ (p は自然数) と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1) \left[\frac{a_n}{n+1} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

できる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば、 $[4] = 4$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$, $[0] = 0$ である。

- (1) $p = 21$ のとき、 a_5 を求めよ。
- (2) $n \geq 1$ のとき、 $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ を示せ。
- (3) $a_5 = a_1$ となるための p の条件を求めよ。
- (4) p より大きい自然数 n に対し、 $a_n = 0$ となることを示せ。

【テーマ】: ガウス記号を含んだ漸化式

方針

(1) は具体的に計算をして求めます。(2) は数学的帰納法とガウス記号の性質から示せます。(3), (4) は (2) の結果を利用して示します。

解答

- (1)
- $a_1 = 21$
- のとき、与えられた漸化式から、

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \left[\frac{21}{2} \right] = 2 \times 10 = 20 & a_3 &= 3 \left[\frac{20}{3} \right] = 3 \times 6 = 18 \\ a_4 &= 4 \left[\frac{18}{4} \right] = 4 \times 4 = 16 & a_5 &= 5 \left[\frac{16}{5} \right] = 5 \times 3 = 15 \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) 【証明】

まず、 $a_n \geq 0$ を示す。(i) $n = 1$ のとき、 $a_1 = p > 0$ より、成り立つ。(ii) $n = k$ のとき、 $a_k \geq 0$ であると仮定すると、

$$a_{k+1} = (k+1) \left[\frac{a_k}{k+1} \right] \geq 0$$

となり、 $n = k+1$ のときも成り立つ。よって、数学的帰納法により示された。

(証明終)

次に $a_{n+1} \leq a_n$ を示す。

【証明】

一般に、

$$\left[\frac{a_n}{n+1} \right] \leq \frac{a_n}{n+1}$$

が成り立つので、両辺を $n+1$ 倍して、

$$(n+1) \left[\frac{a_n}{n+1} \right] \leq a_n \text{ すなわち } a_{n+1} \leq a_n$$

よって、示された。

(証明終)

(3) (2) より, $a_5 = a_1$ となるためには,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 \text{ すなわち } p = 2 \left[\frac{p}{2} \right] = 3 \left[\frac{p}{3} \right] = 4 \left[\frac{p}{4} \right] = 5 \left[\frac{p}{5} \right]$$

が成り立てばよい. よって,

$$\left[\frac{p}{2} \right] = \frac{p}{2}, \left[\frac{p}{3} \right] = \frac{p}{3}, \left[\frac{p}{4} \right] = \frac{p}{4}, \left[\frac{p}{5} \right] = \frac{p}{5}$$

が成り立つので, p は 2, 3, 4, 5 の公倍数となる. ゆえに, 求める p の条件は, p は 60 の倍数……(答)

(4) 【証明】

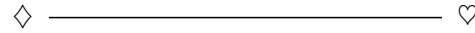
(2) より, $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ であるから,

$$0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1 = p$$

である. よって, $p < n$ のとき,

$$0 \leq a_{n-1} < n \iff 0 \leq \frac{a_{n-1}}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

であるから, $\left[\frac{a_{n-1}}{n} \right] = 0$ となる. ゆえに, $a_n = 0$ が示された.



解説

(1) は, ガウス記号の意味が理解できていれば単なる計算問題です.

(2) は, 前半は数学的帰納法で示し, 後半はガウス記号の性質を用いて示します. ガウス記号の性質とは次のようなもので, 解答ではその一部を利用しました.

参考 【ガウス記号の性質】

一般に, 実数 x に対して, $[x]$ が x を超えない最大の整数を表すとき, 次式が成り立つ.

$$(i) \quad x - 1 < [x] \leq x$$

$$(ii) \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

これら 2 式は, 同値なので一方をきちんと覚えて, 他方は導けるようにしておきましょう.

(3) は, $a_5 = a_1$ となるためには, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ でなければならないので, これを満たすように p の条件を考えます. ガウス記号が整数を表すという点に着目すれば, p が 2, 3, 4, 5 の倍数でなければならないことがわかります.

(4) は, (2) の結果を利用して, $0 \leq \frac{a_{n-1}}{n} < 1$ を示します. 注意したい点は, $\frac{a_{n-1}}{n} \leq 1$ のように『イコール』がついてしまうと示せないので, 『イコール』がない式を書かなければいけないことです.