

4 ('97 神戸大)

【難易度】…標準

n は 2 以上の自然数とし、さいころを n 回振ったときに出る目の数を順に a_1, a_2, \dots, a_n とする。
 $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} < a_n$ となる確率を P_n と定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_2, P_3 を求めよ。
- (2) P_6 を求めよ。
- (3) $P_n = 0$ となるような n の最小値はなにか。理由をつけて述べよ。

【テーマ】：確率の基本性質

方針

具体的に書き並べて解答することもできるし、一般的に考えても解答できます。

解答

- (1) $n = 2$ のとき、 $a_1 < a_2$ であればよいので、 k を $1 \leq k \leq 6$ を満たす自然数とすれば $a_2 = k$ に対して a_1 は $k - 1$ 通りがある。したがって、求める確率は、

$$P_2 = \frac{\sum_{k=1}^6 (k-1)}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \dots\dots(\text{答})$$

$n = 3$ のとき、 $a_1 + a_2 < a_3$ であればよいので、 $a_1 + a_2 = l$ とおくと、 l のとり得る値は $l = 2, 3, 4, 5$ である。このとき、 $a_1 + a_2 = l$ に対して a_3 のとり得る値は $6 - l$ 通りある。また、 (a_1, a_2) の組合せは、

$$(a_1, a_2) = (1, l-1), (2, l-2), \dots, (l-1, 1)$$

の $l - 1$ 通りがある。したがって、求める確率は、

$$P_3 = \frac{\sum_{l=2}^6 (l-1)(6-l)}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54} \dots\dots(\text{答})$$

- (2) $n = 6$ のとき、 $a_1 + a_2 + \dots + a_5 < a_6 \dots\dots \textcircled{1}$ であり、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5 \geq 5 \text{ かつ } a_6 \leq 6$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たすものは、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 5 \text{ かつ } a_6 = 6$$

すなわち、 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 1, 1, 1, 6)$ のみである。したがって、求める確率は、

$$P_6 = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} \dots\dots(\text{答})$$

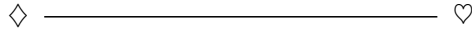
- (3) $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ とおくと、

$$S_{n-1} \geq n - 1 \text{ かつ } a_n \leq 6$$

であることから、 $S_{n-1} < a_n$ が成り立つための条件は、

$$n - 1 < 6 \iff n < 7$$

である。したがって、 $P_n = 0$ となるための条件は、 $n \geq 7$ であるから、求める n の最小値は、 $n = 7 \dots\dots(\text{答})$

**解説**

(1), (2) は具体的に書き出しても解答できますが, ここでは, 応用が利くように一般的に文字を用いて解答しました. (3) は, (2) と同様の考え方で n の最小値を求めています. サイコロの問題なので, a_n のとり得る値が 1 ~ 6 までの自然数だけです. 比較的絞りがやすいでしょうが, カードを取り出す問題などでは, 一般的な計算を必要とすることもあるので, 発展的な学習もしておきましょう.