8 （'79　熊本大） 【難易度】… やや難

$\vec{a}\ \left(\left|\vec{a}\right|>1\right)$ を平面上のベクトル，$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と同じ向きをもつ単位ベクトル，T を長さが 1 を超えない平面上のベクトル全体の集合とする．

（1） T 内のすべてのベクトル $\vec{t}$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{t}\right)\leqq 0$$

ここで，・ はベクトルの内積を表すものとする．

（2） T 内のすべての $\vec{t}$ に対して，不等式 $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}-\vec{t}\right)\leqq 0$ を満たす T 内のベクトル $\vec{x}$ は，$\vec{b}$ のほかにはないことを証明せよ．

【テーマ】：内積と不等式の証明

方針

内積の計算をして大きさが 1 である任意のベクトル $\vec{t}$ について考えます．(2) は必要性を示して，十分性の確認をします．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$\vec{t}\in T$ より，$\left|\vec{t}\right|\leqq 1$ である．また，題意より，$\vec{b}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$ ，$\left|\vec{b}\right|=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{t}\right)&=\left|\vec{b}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{t}+\vec{a}\cdot\vec{t}\\&=1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\left|\vec{a}\right|^2-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}\cdot\vec{t}+\vec{a}\cdot\vec{t}\\&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\right)\vec{a}\cdot\vec{t}\\&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\right)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{t}\right|\cos\theta\\&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(\left|\vec{a}\right|-1\right)\left|\vec{t}\right|\cos\theta\\&=\left(1-\left|\vec{a}\right|\right)\left(1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\right)\end{aligned}$$

ただし，$\vec{a}$ と $\vec{t}$ のなす角を θ とする．ここで，$\left|\vec{t}\right|\leqq 1$ より，$-1\leqq-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\leqq 1$ であるから，

$$1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\geqq 0$$

であり，$1-\left|\vec{a}\right|<0$ より，

$$\left(1-\left|\vec{a}\right|\right)\left(1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\right)\leqq 0$$

となり，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

T 内のすべての $\vec{t}$ に対して与えられた不等式は成立するので，$\vec{t}=\vec{b}$ としても成り立つ．したがって，

$$\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}-\vec{b}\right) \leqq 0$$

$$\left|\vec{x}\right|^2-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{b} \leqq 0$$

(1) より，$\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\vec{b}$ を代入して

$$\left|\vec{x}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|^2 \leqq 0 \cdots\cdots ①$$

一方，$\vec{x}\cdot\vec{b} \leqq \left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right|$ であるから，① とあわせて，

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|^2 \leqq \left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b} \leqq \left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right| \cdots\cdots ②$$

$\left|\vec{b}\right|=1$ であるから，

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right| \leqq \left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b} \leqq \left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|$$

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right| \leqq \left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|$$

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|-\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right| \leqq 0$$

$$\left(\left|\vec{x}\right|-\left|\vec{a}\right|\right)\left(\left|\vec{x}\right|-1\right) \leqq 0$$

$\left|\vec{a}\right|>1$ で $\left|\vec{x}\right| \leqq 1$ より，$\left|\vec{x}\right|-\left|\vec{a}\right|<0$ であり，$\left|\vec{x}\right|-1 \leqq 0$ であるから，この不等式が成り立つのは，等号が成立するときのみであり，その条件は ② とあわせて，

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right| \text{ かつ } \left|\vec{x}\right|=1$$

すなわち $\vec{x}=\vec{b}$ である．逆に，$\vec{x}=\vec{b}$ のとき，(1) から与えられた不等式は成立する．

以上より，題意は示された． **(証明終)**

解説

内積の計算がメインの問題ですが，論証なので完答するのは難しいでしょう．

(1) は，不等式の証明なので左辺を条件式を用いて式変形するだけです．一般に $\vec{x}\cdot\vec{y} \leqq \left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|$ が成り立つので，これを用いて示す必要があります．

(2) は，証明の方針を立てるのは難しく感じるでしょう．まず，与えられた不等式が T 内の任意のベクトルに対して成り立つので，$\vec{t}=\vec{b}$ としても成り立つことが分かります．これは，具体的な値を用いて計算するのと同じで，$\vec{t}$ を具体的なベクトル $\vec{b}$ で置き換えて考えるのです．しかし，これでは必要性を満たしているに過ぎません．すなわち，T 内のある一つのベクトルを考えれば $\vec{x}=\vec{b}$ になったといえますが，任意のベクトル $\vec{t}$ で成り立つ保障（十分性）がないわけです．したがって，最後に逆に $\vec{x}=\vec{b}$ のときも与えられた不等式は常に成り立つことを示さなければ減点されます．必要性と十分性が絡んだ問題は苦手としてる人が多いので，多くの問題を通して考え方を身につけておきましょう．