

9 ('78 徳島大)

【難易度】…標準

中心 O 、半径 a 、中心角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の扇形を OAB とする。 A から半径 OB に下ろした垂線を AB_1 、 B_1 を通り弦 AB に平行な直線と半径 OA との交点を A_1 、 A_1 から OB に下ろした垂線を A_1B_2 、 B_2 を通り AB に平行な直線と OA との交点を A_2 とする。このように限りなく繰り返して、 OA 、 OB 上にそれぞれ点列 $\{A_n\}$ 、 $\{B_n\}$ を作る。 $\triangle ABB_1$ 、 $\triangle A_1B_1B_2$ 、 \dots 、 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 、 \dots の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_{n+1} 、 \dots とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ。

(2) 扇形 OAB の面積を T とするとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{T}$ を求めよ。