20 （'97　徳島大） 【難易度】 … 標準

$f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とし，曲線 $C : y = f(x)$ を考える．$a > 0$ のとき，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とし，点 P を通り接線 ℓ に垂直な直線を m とする．次の問いに答えよ．

（1） 直線 ℓ と m の方程式を求めよ．

（2） 直線 ℓ, m と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

（3） (2) で求めた V を最小にする a の値を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は，接線と法線を公式を用いて求めます．(2) は，回転体が円錐を 2 つ合わせたものなので，円錐の体積公式から求まります．(3) は，微分して最小にする a の値を増減表から求めます．

♣ ♠

解答

（1） $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ より，直線 ℓ の方程式は，

$$y = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})(x - a) + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\ell : y = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})x - \frac{a}{2}(e^a - e^{-a}) + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．また，法線 m の方程式は，

$$y = -\frac{2}{e^a - e^{-a}}(x - a) + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{m : y = -\frac{2}{e^a - e^{-a}}x + \frac{2a}{e^a - e^{-a}} + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） ℓ と x 軸との交点の x 座標は，

$$0 = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})x - \frac{a}{2}(e^a - e^{-a}) + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

$$\frac{1}{2}(e^a - e^{-a})x = \frac{a}{2}(e^a - e^{-a}) - \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

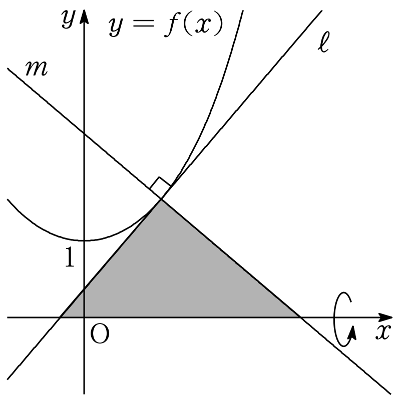
$$\therefore\ \ x = a - \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$$

であり，m と x 軸との交点の x 座標は，

$$0 = -\frac{2}{e^a - e^{-a}}x + \frac{2a}{e^a - e^{-a}} + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

$$\frac{2}{e^a - e^{-a}}x = \frac{2a}{e^a - e^{-a}} + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$$

$$\therefore\ \ x = a + \frac{(e^a + e^{-a})(e^a - e^{-a})}{4}$$



よって，回転体の体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^2\left\{\left(a + \frac{(e^a + e^{-a})(e^a - e^{-a})}{4}\right) - \left(a - \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{12}(e^a + e^{-a})^2\left(\frac{(e^a + e^{-a})(e^a - e^{-a})}{4} + \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}\right) \\ &= \frac{\pi}{12}(e^a + e^{-a})^2 \cdot \frac{(e^a - e^{-a})^2(e^a + e^{-a}) + 4(e^a + e^{-a})}{4(e^a - e^{-a})} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a+e^{-a})\{(e^a-e^{-a})^2+4\}}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a+e^{-a})(e^a+e^{-a})^2}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(e^a+e^{-a})^5}{48(e^a-e^{-a})}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (2) で求めた V を a で微分すると,

$$V' = \frac{\pi}{48}\cdot\frac{5(e^a+e^{-a})^4(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^5(e^a+e^{-a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{48}\cdot\frac{(e^a+e^{-a})^4\{5(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^2\}}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{12}\cdot\frac{(e^a+e^{-a})^4(e^{2a}-3+e^{-2a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$

$V'=0$ のとき, $e^a+e^{-a}>0$ より,

$$e^{2a}-3+e^{-2a}=0 \iff e^{4a}-3e^{2a}+1=0$$
$$\therefore\ e^{2a}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり, $a>0$ より $e^{2a}>1$ であるから, $e^{2a}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ である. $e^a>0$ より,

$$e^a=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \iff a=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

よって, 増減表は次のようになる.

a	0	$\cdots$	$\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\cdots$
V'		$-$	0	$+$
V		$\searrow$		$\nearrow$

したがって, V を最小にする a の値は, $\boldsymbol{a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}\cdots\cdots$(**答**)

◇ ♡

解説

(2) は, 回転体の体積ですが, 積分するのではなく円錐の体積公式を用いましょう. (3) は, V の最小値を与える a の値を求める問題ですが, 実際に最小値を求めることもできるので, 求めておきます.

$e^{2a}+e^{-2a}=3$ より, $(e^a+e^{-a})^2=5$ で, $e^a+e^{-a}>0$ より,

$$e^a+e^{-a}=\sqrt{5}$$

であり,

$$(e^a-e^{-a})^2=e^{2a}-2+e^{-2a}=1$$

であるから, $e^a-e^{-a}>0$ より, $e^a-e^{-a}=1$ を得る. したがって, $a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき, V は最小値

$$V=\frac{\pi}{48}\cdot\frac{(\sqrt{5})^5}{1}=\frac{25\sqrt{5}}{48}\pi$$

をとる.

