

24 ('12 山形大)

【難易度】…標準

袋の中に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 8 枚のカードが入っている。袋の中からカードを 1 枚取り出して、もとに戻すという操作を 4 回繰り返す。1 回目, 2 回目, 3 回目, 4 回目に取り出されたカードに書かれた数をそれぞれ a, b, c, d とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $a + b + c + d = 6$ となる確率を求めよ。
- (2) 積 $abcd$ が奇数となる確率を求めよ。
- (3) $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = 0$ となる確率を求めよ。
- (4) $\frac{1}{ab} + \frac{2}{cd} = \frac{1}{2}$ となる確率を求めよ。

【テーマ】: 確率の基本性質

方針

- (1) は, 和が 6 となる組合せを考えます。(2) は 4 つの数がすべて奇数であればよく, (3) は, 余事象を考えます。(4) は整数問題で, $ab = m, cd = n$ とおいて考えます。

解答

- (1) 1 回の試行によるカードの取り出し方の総数は 8 通りである。

$a + b + c + d = 6$ となる 4 つの数の組合せは,

$$\{1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 2, 2\}$$

である。これら 4 つの数を a, b, c, d に対応させればよいので,

$$\{1, 1, 1, 3\} \text{ については 4 通り, } \{1, 1, 2, 2\} \text{ については } {}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

ある。ゆえに, 求める確率は,

$$\frac{4+6}{8^4} = \frac{5}{2048} \dots\dots(\text{答})$$

- (2) 4 つの数の積が奇数となるのは, 4 つの数がすべて奇数のときだけであるから, 求める確率は,

$$\left(\frac{4}{8}\right)^4 = \frac{1}{16} \dots\dots(\text{答})$$

- (3) $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = 0$ は a, b, c, d の少なくとも 1 つが 1 であることと同値であるから, 1 が 1 回も出ない確率を考える。その確率は, $\left(\frac{7}{8}\right)^4$ であるから, 余事象の確率より, 求める確率は,

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{1695}{4096} \dots\dots(\text{答})$$

- (4) $ab = m, cd = n$ とすると, 与えられた方程式は,

$$\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \iff mn - 2n - 4m = 0 \iff (m-2)(n-4) = 8$$

$m-2 \geq -1, n-4 \geq -3$ より, かけて 8 となる整数の組合せは,

$$(m-2, n-4) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

$$(m, n) = (3, 12), (4, 8), (6, 6), (10, 5)$$

の 4 通りがある。ゆえに, $m = ab, n = cd$ として, a, b, c, d の組合せの数を調べる。

(i) $(ad, cd) = (3, 12)$ のとき ,

$$(a, b) = (1, 3), (3, 1)$$

$$(c, d) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

より , $2 \times 4 = 8$ 通り .

(ii) $(ad, cd) = (4, 8)$ のとき ,

$$(a, b) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$(c, d) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

より , $3 \times 4 = 12$ 通り .

(iii) $(ad, cd) = (6, 6)$ のとき ,

$$(a, b) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

$$(c, d) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

より , $4 \times 4 = 16$ 通り .

(iv) $(ad, cd) = (10, 5)$ のとき ,

$$(a, b) = (2, 5), (5, 2)$$

$$(c, d) = (1, 5), (5, 1)$$

より , $2 \times 2 = 4$ 通り .

以上より , 求める確率は ,

$$\frac{8 + 12 + 16 + 4}{8^4} = \frac{40}{8^4} = \frac{5}{512} \dots\dots(\text{答})$$

である .



解説

確率の基本的な計算問題です . (3) は , $xy = 0$ ならば $x = 0$ または $y = 0$ であることを応用した問題です . ただし , ここで勘違いをしてはいけないのは数学で用いる『または』は集合では和集合のことを表しているので , 『かつ』も含んでいます . したがって , $x = 0$ または $y = 0$ は $x = y = 0$ も含んでいます . すなわち x, y がともに 0 にならないときが余事象になります . ちなみに x, y がともに 0 にならないことと $xy \neq 0$ は同値です .

(4) は , $ab = m, cd = n$ などとおけば見慣れた不定方程式が出てくるので , 整数問題として解答できます . ただし , a, b, c, d のとり得る値は 1~8 の整数であることに注意をしましょう . あとは , 1 つ 1 つ丁寧に a, b, c, d の組合せを計算すればよいのです .