30 （'82　奈良県立医科大） **【難易度】** … 標準

(1)　$a>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $f(x)=xe^{-x}$ を k 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような x の値を a_k とする．a_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ である．

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ．

(4)　$y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\lim_{b\to 1-0}\displaystyle\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) では，$h>0$ として，$a=1+h$ とおき，二項定理を活用します．(2) は，第 k 次導関数を類推しそれが正しいことを数学的帰納法で示します．(3) は，$S(x)$ を計算し，$\sum_{k=1}^{n}S(a_k)$ を求めてから極限をとります．(4) は，元の関数のグラフと逆関数のグラフは $y=x$ に関して対称であることを利用します．

解答

(1)　**【証明】**

$a>1$ のとき，$h>0$ として，$a=1+h$ とおくと，

$$a^n=(1+h)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots\cdots+h^n>{}_n\mathrm{C}_2h^2$$

したがって，

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{{}_n\mathrm{C}_2h^2}=\frac{2n}{n(n-1)h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{(n-1)h^2}=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

が成り立つ．ゆえに，示された．　**（証明終）**

(2)　$f(x)=xe^{-x}$ より，

$$f'(x)=-(x-1)e^{-x},\quad f''(x)=(x-2)e^{-x}$$

となるので，$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ と推定できる．

$k=1$ のときは成り立つので，ある k での成立を仮定して，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^ke^{-x}+(-1)^{k+1}(x-k)e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}(x-k-1)e^{-x}\end{aligned}$$

より，$k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法によりすべての自然数 k に対して，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$$

が成り立つ．$f^{(k)}(x)=0$ を満たす x の値は，$e^{-x}\neq 0$ であることから，$x=k$ である．

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_k=k}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt=\Big[-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^x=-(x+1)e^{-x}+1$ …… ①

(2) より，$S(a_k)=S(k)=-(k+1)e^{-k}+1$ であるから，

$$n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)=n+\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}-n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$ とおくと，

$$T_n=2e^{-1}+3e^{-2}+\cdots\cdots+(n+1)e^{-n}$$
$$e^{-1}T_n=\qquad 2e^{-2}+\cdots\cdots+ne^{-n}+(n+1)e^{-n-1}$$

辺々引くと，

$$(1-e^{-1})T_n=2e^{-1}+e^{-2}+\cdots\cdots+e^{-n}-(n+1)e^{-n-1}\iff\frac{e-1}{e}T_n=\frac{1}{e}+\frac{\frac{1}{e}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{e}}-\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$T_n=\frac{1}{e-1}+\frac{e\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{(e-1)^2}-\frac{e}{e-1}\cdot\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

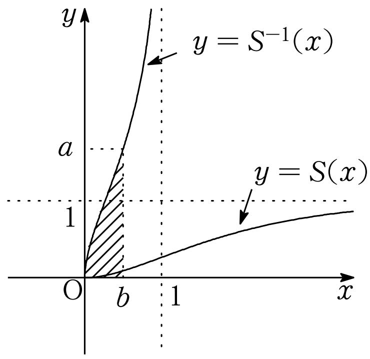
したがって，(1) の結果を用いて，

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{e-1}+\frac{e}{(e-1)^2}=\boldsymbol{\frac{2e-1}{(e-1)^2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4)　① より，

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}+1\right)=1$$

よって，$y=S(x)$ と $y=S^{-1}(x)$ のグラフは右図のようになる．



$S^{-1}(b)=a$ とすると，$b=S(a)=1-\dfrac{a+1}{e^a}$ であり，

$b\to1-0$ のとき，$a\to\infty$ である．よって，

$$\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy=\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(x)\,dx$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left\{ab-\int_0^a S(x)\,dx\right\}$$ ☞ 解説

$$\int_0^a S(x)\,dx=\int_0^a\{1-(x+1)e^{-x}\}\,dx$$
$$=\Big[\,x+(x+1)e^{-x}\,\Big]_0^a-\int_0^a e^{-x}\,dx$$
$$=a+(a+1)e^{-a}-1+e^{-a}-1$$
$$=(a+2)e^{-a}+a-2$$

$$(\text{与式})=\lim_{b\to1-0}\{ab-(a+2)e^{-a}-(a-2)\}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(2-\frac{a+2}{e^a}\right)$$
$$=\mathbf{2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

(1) は，一度は経験しておきたい証明です．1 より大きい実数 a を $h>0$ として $1+h$ の形にすることで二項定理が使えるようになります．この他にも実数 x を整数 n と $0<\alpha<1$ を満たす実数 α を用いて $x=n+\alpha$ のように表す問題もあります．

(2) は，第 k 次導関数を類推しそれを数学的帰納法で証明する問題です．類推が明らかな場合を除いて証明をつけるようにしておきましょう．

(3) は，計算問題です．定積分・和・極限を丁寧に計算するだけです．

(4) は，逆関数の定積分が出てくるので，経験したことがない人は途方に暮れたかもしれませんが，逆関数は元の関数を $y=x$ に関して対称なので，それを利用すればグラフがかけます．グラフがかければ，定積分を面積と捉えることで積分の計算ができます．本問では，$\int_0^b S^{-1}(x)\,dx$ を長方形の面積 ab から $\int_0^a S(x)\,dx$ の面積を除く部分と同じであることを利用しています．

