1 （′10　三重大） **【難易度】** … 標準

次の問いに答えよ．

（1） p, q, r, s を整数とする．このとき $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ となることを示せ．ここで $\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい．

（2） 自然数 n に対し，$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 a_n, b_n が存在することを数学的帰納法により示せ．

（3） a_n, b_n を (2) のものとする．このときすべての自然数 n について $(x, y)=(a_n, b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) は，論証問題で背理法を用いて示す．(2), (3) は，数学的帰納法を用いて示す．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2} \iff (q-s)\sqrt{2}=r-p$

$q-s\neq 0$ とすると，

$$\sqrt{2}=\frac{r-p}{q-s}$$

となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．よって，$q=s$ である．このとき，$p=r$ となるので，示された．

（証明終）

（2） **【証明】**

(i) $n=1$ のとき，

$a_1=3$，$b_1=2$ とおくと，成立するので，$n=1$ のときは成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，

$$(3+2\sqrt{2})^k=a_k+b_k\sqrt{2}$$

を満たす整数 a_k, b_k が存在すると仮定する．

$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{k+1}&=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k\\&=(3+2\sqrt{2})(a_k+b_k\sqrt{2})\\&=3a_k+3b_k\sqrt{2}+2a_k\sqrt{2}+4b_k\\&=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}\end{aligned}$$

一方，$(3+2\sqrt{2})^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}$ であり，$a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ はすべて整数であるから，(1) の結果を用いれば，

$$\begin{cases} a_{k+1} = 3a_k + 4b_k \\ b_{k+1} = 2a_k + 3b_k \end{cases}$$

とおくことができるので，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上より，示された． **（証明終）**

(3) すべての自然数について，$a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = 1$ であることを数学的帰納法により示す．

【証明】

(i) $n = 1$ のとき，

(2) より，$a_1 = 3, b_1 = 2$ であるから，

$$a_1{}^2 - 2b_1{}^2 = 9 - 8 = 1$$

となり，$n = 1$ のとき成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，

$$a_k{}^2 - 2b_k{}^2 = 1$$

が成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{k+1}{}^2 - 2b_{k+1}{}^2 &= (3a_k + 4b_k)^2 - 2(2a_k + 3b_k)^2 \\ &= 9a_k{}^2 + 24a_kb_k + 16b_k{}^2 - 8a_k{}^2 - 24a_kb_k - 18b_k{}^2 \\ &= a_k{}^2 - 2b_k{}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ゆえに，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上より，示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

(1) は，受験生ならば知っておかなければいけない基本事項の証明です．背理法を用いて証明をしますが，ここでは有理数がどんな数なのかを知っていなければいけません．有理数とは，$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ の形に表せる数です．この形に表せない数を無理数と呼んでいます．無理数の代表的なものは，$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ などがあります．ここでは，$\sqrt{2} = \dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ となったので，(無理数) = (有理数) となり矛盾したことになります．

(2), (3) は，数学的帰納法を用いて証明をする標準的な問題です．特に，(2) は証明の中で漸化式が登場するので，これを利用する問題として (3) でいろいろなものが出題されます．(2) は，多くの類題があるので必ずマスターしておきましょう．