

12

(12 九州工業大・改)

【難易度】…標準

O を原点とする座標平面上に点 $P_0(1, 1)$, $Q_0(1, 0)$ がある. ある p ($0 < p < 1$) に対して, 点 $P_1(p, p)$, $Q_1(p, 0)$ を定め, さらに, 自然数 n について点 P_{n+1} , Q_{n+1} を次のように定める.

- ・点 Q_n を通り直線 Q_0P_1 と平行な直線と, 直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする.
- ・点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と, x 軸の交点を Q_{n+1} とする.

また, $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 を p を用いて表せ.
- (2) 点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき, 点 Q_n の x 座標を p, q を用いて表せ.
- (3) S_n を p, n を用いて表せ.
- (4) n を定数として, p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき, S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた S_n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ.

【テーマ】: 無限等比級数と極限

方針

(1)~(3) は, 面積 S_n を求める誘導です. 漸化式を立式して解けば求まります. (4) は, 最大値を求めたいので微分しましょう. (5) は, 関数の極限に関する公式が必要になります.

解答

- (1) S_1 は $\triangle Q_0P_1Q_1$ の面積である. $P_1Q_1 = p$, $Q_1Q_0 = 1 - p$ であるから,

$$S_1 = \frac{1}{2} p(1 - p) \cdots \cdots (\text{答})$$

- (2) 直線 P_1Q_0 の傾きは, $\frac{p}{p-1}$ であるから, 直線 $Q_{n-1}P_n$ の方程式は,

$$y = \frac{p}{p-1}(x - q)$$

である. これと $y = x$ の交点が P_n であるから,

$$x = \frac{p}{p-1}(x - q)$$

$$x = pq$$

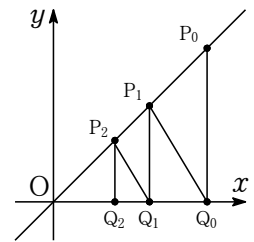
ゆえに, Q_n の x 座標は, $pq \cdots \cdots (\text{答})$

- (3) Q_n の x 座標を q_n とする. このとき, (2) より, $q_{n+1} = pq_n$ となるので, $q_0 = 1$ より,

$$q_n = p^n$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} P_n Q_n \times Q_n Q_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} p^n (p^{n-1} - p^n) \\ &= \frac{1}{2} (p^{2n-1} - p^{2n}) \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



(4) (3) より, S_n を p で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dS_n}{dp} &= \frac{1}{2} \{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\} \\ &= \frac{1}{2} p^{2n-2} (2n-1-2np)\end{aligned}$$

$0 < p < 1$ より, $\frac{dS_n}{dp} = 0$ となるのは, $p = \frac{2n-1}{2n}$ のときで, このとき, 増減表は次のようになる.

p	0	...	$\frac{2n-1}{2n}$...	1
$\frac{dS_n}{dp}$		+	0	-	
S_n		↗		↘	

よって, S_n が最大となる p は,

$$p = \frac{2n-1}{2n} \dots\dots(\text{答})$$

であり, このとき,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} \left(1 - \frac{2n-1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

である.

(5) (4) より, 求める極限值は,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left[\left\{1 + \frac{1}{(-2n)}\right\}^{-2n} \right]^{-1} \cdot \frac{2}{2 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{4} e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{4e} \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

◆ ◆ ◆
【解説】

丁寧な誘導があるので, 一つ一つの設問を確実に解けるようにしましょう.(5) では, 自然対数の底に冠する極限を利用しなければいけないので, 忘れていた人は思い出しておきましょう.

【自然対数の底に関する極限】

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= 1 & \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1\end{aligned}$$

これらの公式は, 置き換えを行うことで同値であることが証明できる.