33　（'12　横浜国立大）　**【難易度】**… **標準**

xy 平面上に曲線 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ $(t \neq 1)$ における接線を，P を中心として反時計回りに 45° 回転して得られる直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1)　ℓ の方程式を求めよ．

(2)　C と ℓ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

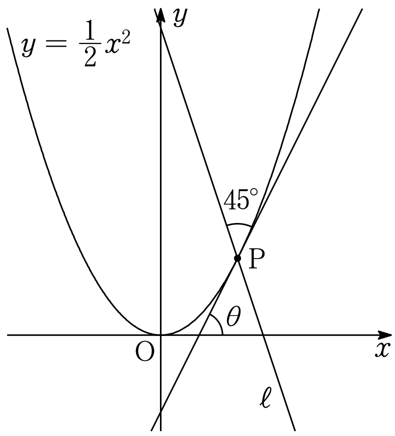
【テーマ】：微積分の融合

方針

傾きは，$\tan\theta$ を用いて表せます．放物線と直線で囲まれる部分の面積は，公式が使えますが，交点の座標が文字で表されているためその大小によって符号が変化することに注意が必要です．(3) の面積の最小値は，相加平均・相乗平均の関係を用いるか，理系の人は，微分をして求めることもできます．

♣　♠

解答



(1)　$y'=x$ であるから，C 上の点 P における接線の傾きは t である．この接線と x 軸の正の方向とのなす角を θ とすると，$\tan\theta=t$ であるから，直線 ℓ の傾きは，$\tan(\theta+45^\circ)$ になる．よって，

$$\tan(\theta+45^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{t+1}{1-t}$$

である．ゆえに，求める直線 ℓ の方程式は，

$$y=\frac{t+1}{1-t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{1+t}{1-t}x+\frac{t^3+t^2+2t}{2(t-1)}}\ \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2)　C と ℓ の交点の x 座標は，

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1+t}{1-t}x+\frac{t^3+t^2+2t}{2(t-1)} \iff (x-t)\left(x-\frac{t^2+t+2}{1-t}\right)=0\ \cdots\cdots Ⓐ$$

よって，$x=t,\ \dfrac{t^2+t+2}{1-t}$ となる．この 2 数の小さい方を α とし，大きい方を β とすると，面積 $S(t)$ は，

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_\alpha^\beta\left\{\left(\frac{1+t}{1-t}x+\frac{t^3+t^2+2t}{2(t-1)}\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx\\&=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\ \cdots\cdots Ⓑ\\&=-\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=\frac{1}{12}\left|t-\frac{t^2+t+2}{1-t}\right|^3=\frac{1}{12}\left|\frac{-2(t^2+1)}{t-1}\right|^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}\left|\frac{t^2+1}{t-1}\right|^3}\ \cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)　(2) より，$f(t)=\left|\dfrac{t^2+1}{t-1}\right|$ とおくと，$f(t)$ の最小値を求めればよい．

(i)　$t>1$ のとき，

$$f(t)=\frac{t^2+1}{t-1}=\frac{(t-1)(t+1)+2}{t-1}=t+1+\frac{2}{t-1}=t-1+\frac{2}{t-1}+2$$

$t-1>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$f(t) \geqq 2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+2=2\sqrt{2}+2$$

等号は，$t-1=\dfrac{2}{t-1}$ すなわち $t=1+\sqrt{2}$ のとき成立する．

(ii) $t<1$ のとき，(i) のときと同様に $f(t)$ を式変形すると，

$$f(t)=\frac{t^2+1}{1-t}=1-t+\frac{2}{1-t}-2$$

$1-t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$f(t) \geqq 2\sqrt{(1-t)\cdot\frac{2}{1-t}}-2=2\sqrt{2}-2$$

等号は，$1-t=\dfrac{2}{1-t}$ すなわち $t=1-\sqrt{2}$ のとき成立する．

(i), (ii) より，$f(t)$ が最小となるときの t の値は，$\boldsymbol{t=1-\sqrt{2}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

Ⓐ の式変形は，それだけで式変形すると大変ですが，そこまでの計算過程をしっかりと把握できれば暗算でできます．なぜなら，直線 ℓ は点 P で C と交わっているので，因数分解したときに $x-t$ が因数として出てくることが分かるからです．したがって，残りの因数は，x の 2 次の係数と定数項だけを考えて因数分解すれば容易にできます．実用的に使えるようにしっかりと演習をしておきましょう．

Ⓑ の式変形も意味を考えて変形すれば容易に行えます．α, β は Ⓐ の 2 解です．そして，面積を計算する際の被積分関数は，直線 ℓ の方程式から曲線 C の方程式を引いた形になるので，それを因数分解するということは，Ⓐ の左辺と同じ形になります (2 次の係数には注意しましょう)．この形になれば，下の公式が使えます．

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，a がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．

(3) の最小値を求める方法は，解答では相加平均・相乗平均の関係を用いましたが，理系の人は，数学 Ⅲ の微分を用いても求めることができます．

$f(t)=\dfrac{t^2+1}{t-1}$ とおくと，$f'(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{(t-1)^2}$ なので，$f'(t)=0$ のとき，$t=1\pm\sqrt{2}$ となります．あとは，増減表をかいてグラフをかけば，$|f(t)|$ が最小となるのは，$t=1-\sqrt{2}$ のときであることが分かります．文系の人は，知っている知識を活用するため，巧みな式変形が必要ですが，理系の人は数学 Ⅲ の微分を使った方が楽に求められるでしょう．