40 （′12　三重大） 【難易度】 … ${}^{や}_{や}$難

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2k}{3}\,\right]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と和

方針

(1) は，基本的な公式の証明です．(2) は (1) をヒントにして 3 で割った余りで場合分けを行います．

解答

(1) **【証明】**

a は実数であるから，

$$[\,a\,] \leqq a < [\,a\,]+1$$

が成り立つので，

$$[\,a\,]+m \leqq a+m < [\,a\,]+m+1$$

$[\,a\,]+m$ は整数なので，

$$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$$

が成り立つことが示された． **(証明終)**

(2) (1) の結果より，m を自然数として，

(i) $k=3m$ のとき，

$$a_{3m}=\left[\,\frac{2\cdot 3m}{3}\,\right]=[\,2m\,]=2m$$

(ii) $k=3m-1$ のとき，

$$a_{3m-1}=\left[\,\frac{2\cdot(3m-1)}{3}\,\right]=[\,2m-\tfrac{2}{3}\,]=\left[\,2m-1+\frac{2}{3}\,\right]=2m-1+\left[\,\frac{2}{3}\,\right]=2m-1$$

(iii) $k=3m-2$ のとき，

$$a_{3m-2}=\left[\,\frac{2\cdot(3m-2)}{3}\,\right]=[\,2m-\tfrac{4}{3}\,]=\left[\,2m-2+\frac{2}{3}\,\right]=2m-2+\left[\,\frac{2}{3}\,\right]=2m-2$$

よって，i を自然数として，

(ア) $n=3i$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{3i} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{i} (a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{i} (2k+2k-1+2k-2)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{i}(6k-3)$$
$$= 6\cdot\frac{1}{2}i(i+1)-3i$$
$$= 3i^2$$
$$= \frac{n^2}{3} \quad \left(\because \quad i=\frac{n}{3}\right)$$

(イ) $n=3i-1$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{3i-1}a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{i}(a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2})-a_{3i}$$
$$= 3i^2-2i \quad (\because \text{ (ア)})$$
$$= 3\left(\frac{n+1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{3} \quad \left(\because \quad i=\frac{n+1}{3}\right)$$
$$= \frac{n^2-1}{3}$$

(ウ) $n=3i-2$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{3i-2}a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{i-1}(a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2})+a_{3i-2}$$
$$= 3(i-1)^2+2i-2 \quad (\because \text{ (ア)})$$
$$= 3i^2-4i+1p$$
$$= 3\left(\frac{n+2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{n+2}{3}+1 \quad \left(\because \quad i=\frac{n+2}{3}\right)$$
$$= \frac{n^2-1}{3}$$

ゆえに, i を自然数として,

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}a_k = \begin{cases} \dfrac{n^2}{3} & (n=3i) \\ \dfrac{n^2-1}{3} & (n=3i-1,\ 3i-2) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である.

◇ ♡

解説

(1) は, ガウス記号に関する基本的な性質です. 問題文中に 実数 x に対して, $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ が成り立つことが書かれているので, これをヒントにすれば容易に示せます.

(2) は, ガウス記号を含む数列の和なので, 経験がないと難しいでしょう. まず, $k=1, 2, 3, \cdots$ を代入してみて a_k や $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ がどのような値になるかを実験してみると様子が分かってくるでしょう. 3 を周期として同じ値が繰り返されるはずです. それは, $a_k=\left[\,\dfrac{2k}{3}\,\right]$ なので, 分母が 3 であることから予想することができます. あとは, k を 3 で割った余りで場合分けをして, a_k を求めます. 次に和ですが a_k が 3 を周期としている数列なので, 和も n を 3 で割った余りで場合分けをします. 結果的には, 3 で割り切れるか割り切れないかの 2 通りになりますが, これはあくまで結果論です.