5 （'13　千葉大） 【難易度】… 標準

$\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ.

【テーマ】：高次方程式と三角関数

方針

$\tan 10^\circ = x$ とおいて，考えます.

♣ ♠

解答

【証明】

$\tan 10^\circ = x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ &= \tan(30^\circ - 10^\circ)\\ &= \frac{\tan 30^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 10^\circ}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - x}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x}\\ &= \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x} \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 40^\circ &= \tan(30^\circ + 10^\circ)\\ &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 10^\circ}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + x}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}-x}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ &= \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}-x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-3x^2}{3-x^2} \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

一方，加法定理より，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ &= \frac{2\tan 10^\circ}{1-\tan^2 10^\circ}\\ &= \frac{2x}{1-x^2} \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

であるから，①, ③ が等しいことより，

$$\begin{aligned}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x} &\iff 2x(\sqrt{3}+x) = (1-x^2)(1-\sqrt{3}x)\\ &\iff \sqrt{3}x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{3}x + 1 = 0\\ &\iff \sqrt{3}x(x^2-3) = 3x^2 - 1\\ &\iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-3x^2}{3-x^2} \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

②, ④ より，

$$\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ = x \text{ すなわち } \tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$$

であることが示された. **（証明終）**

♢ ♡

解説

ポイントは，$\tan 10^\circ = x$ と置いて，$\tan 20^\circ$, $\tan 40^\circ$ を x で表すことです．なお，$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を忘れずに用いましょう．しかし，これだけでは解けないので，2 倍角の公式を用いて $\tan 20^\circ$ を 2 通りで表現します.