

11

('07 鹿児島大)

【難易度】…標準

A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする．毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする．どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする．1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である．また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の  $\frac{1}{3}$  倍である．このとき，次の各問いに答えよ．

- (1) 1 回目の試合で A チームが勝つ確率  $P_A$  と B チームが勝つ確率  $P_B$  を求めよ．
- (2) 前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率  $P_{AA}$  と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率  $P_{BB}$  を求めよ．
- (3) 4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ．
- (4) 5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このとき A チームが優勝している確率を求めよ．

【テーマ】：条件つき確率

方針

前日の試合結果で翌日に勝つ確率が変化するので，反復試行の確率は使えません．考えられる場合は 4 通りであることに気付くことがポイントです．

解答

- (1)  $P_A = 2P_B$  かつ  $P_A + P_B = 1$  であるから，

$$P_A = \frac{2}{3}, P_B = \frac{1}{3} \dots \dots (\text{答})$$

である．

- (2)  $P_{AA} = 2P_{AB}$  かつ  $P_{AA} + P_{AB} = 1$  であるから，

$$P_{AA} = \frac{2}{3} \dots \dots (\text{答})$$

である．また， $P_{BA} = \frac{1}{3}P_{BB}$  かつ  $P_{BA} + P_{BB} = 1$  であるから，

$$P_{BB} = \frac{3}{4} \dots \dots (\text{答})$$

- (3) 3 回で優勝が決まるのは，A が 3 連勝するかまたは B が 3 連勝するときなので，その確率  $P_3$  は，

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{209}{432} \end{aligned}$$

4 回で優勝が決まるのは，

- (i) BAAA
- (ii) ABBB

のいずれかである．(2) より， $P_{BA} = \frac{1}{4}$ ， $P_{AB} = \frac{1}{3}$  である．

よって，4 回の試合で優勝が決まる確率  $P_4$  は，

$$P_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{35}{216}$$

ゆえに、求める確率は、

$$\frac{209}{432} + \frac{35}{216} = \frac{31}{48} \dots\dots(\text{答})$$

(4) 5 回目の試合で優勝が決まる確率を考える。

(i) ABAAA となる確率を  $P_{ABAAA}$  とすると、

$$\begin{aligned} P_{ABAAA} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{81} \end{aligned}$$

(ii) BBAAA となる確率を  $P_{BBAAA}$  とすると、

$$\begin{aligned} P_{BBAAA} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

(iii) BABBB となる確率を  $P_{BABBB}$  とすると、

$$\begin{aligned} P_{BABBB} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

(iv) AABBB となる確率を  $P_{AABBB}$  とすると、

$$\begin{aligned} P_{AABBB} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ゆえに、求める条件つき確率  $P$  は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{P_{ABAAA} + P_{BBAAA}}{P_{ABAAA} + P_{BBAAA} + P_{BABBB} + P_{AABBB}} \\ &= \frac{\frac{2}{81} + \frac{1}{36}}{\frac{2}{81} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{12}} \\ &= \frac{272}{785} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇ ————— ♡

### 解説

前日 A が勝つときと、前日 B が勝つときで場合を分ければ、次の 4 つの確率を考えればよいことが分かります。

$$P_{AA} = \frac{2}{3} \quad \dots \quad \text{前日 A が勝って、翌日も A が勝つ。}$$

$$P_{AB} = \frac{1}{3} \quad \dots \quad \text{前日 A が勝って、翌日は B が勝つ。}$$

$$P_{BA} = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \text{前日 B が勝って、翌日は A が勝つ。}$$

$$P_{BB} = \frac{3}{4} \quad \dots \quad \text{前日 B が勝って、翌日も B が勝つ。}$$

これらの確率は、(2) ですべて求められるので、(3) 以降は、それを組合せるだけとなります。