1 ($'12$　東北大)　**【難易度】** … 標準

以下の問いに答えよ.

(1)　実数 x, y が $4^x - 4\cdot 2^x + 9^y - 2\cdot 3^y \leqq -1$ を満たすとき, $2^x + 3^y$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(2)　実数 x, y が $4^x - 2\cdot 2^x + 2^y \leqq 0$ を満たすとき, $x + y$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【テーマ】: 領域と最大・最小

方針

(1) は, 指数不等式で与えられているため, $X = 2^x$ などと置き換えます. $2^x + 3^y$ のとり得る値の範囲を求めるため, $2^x + 3^y = k$ と置き, k のとり得る値の範囲を求めます. (2) も同様に考えますが, $x + y$ のとり得る値の範囲を求めるので, k と置くのではなく $X = 2^x, Y = 2^y$ として, XY のとり得る値を考えます.

♣　♠

解答

(1)　$2^x = X, 3^y = Y$ とおくと, $X > 0, Y > 0$ であり, 与えられた不等式は,

$$X^2 - 4X + Y^2 - 2Y \leqq -1 \iff (X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4$$

と変形することができる.

$X + Y = k$ と置くと, $(X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4, X > 0, Y > 0$ のとき, $X + Y = k$ において, k のとり得る値の範囲を求めればよい.

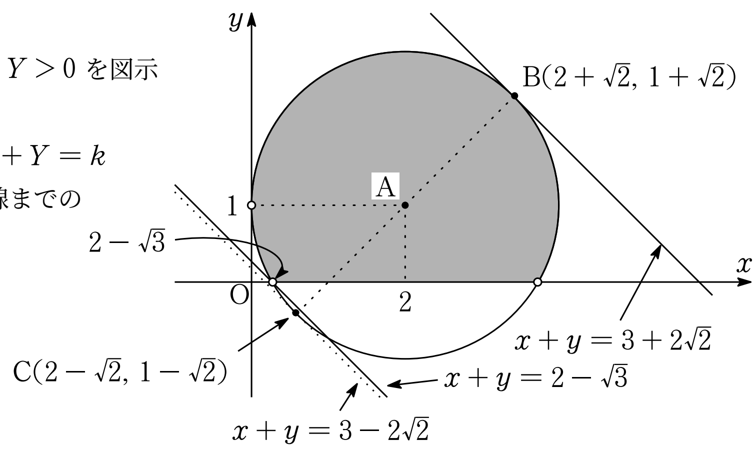
領域 $(X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4, X > 0, Y > 0$ を図示すると, 右図の網点部分になる.

円 $(X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4$ と直線 $X + Y = k$ が共有点をもつためには, 円の中心と直線までの距離が円の半径 2 以下であればよいので,

$$\frac{|2+1-k|}{\sqrt{1+1}} \leqq 2$$

$$|k-3| \leqq 2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad 3 - 2\sqrt{2} \leqq k \leqq 3 + 2\sqrt{2}$$



また, 円 $(X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4$ と x 軸との交点の x 座標の値は, $Y = 0$ として,

$$(X-2)^2 + 1 = 4 \iff X = 2 \pm \sqrt{3}$$

となる. 上図のように, 直線 $X + Y = k$ が点 $(2-\sqrt{3}, 0)$ を通るときの k の値は, $k = 2 - \sqrt{3}$ であり, 直線が円と接するときの値 $k = 3 - 2\sqrt{2}$ より大きい. ゆえに, k の値の範囲は, $2 - \sqrt{3} < k \leqq 3 + 2\sqrt{2}$ となるので,

$$\mathbf{2 - \sqrt{3} < 2^x + 3^y \leqq 3 + 2\sqrt{2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$X = 2^x, Y = 2^y$ とおくと, $X > 0, Y > 0$ である. このとき, 与えられた不等式は,

$$X^2 - 2X + Y \leqq 0 \iff Y \leqq -X^2 + 2X$$

である. 一方, $XY = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ であるから, XY のとり得る値の範囲を求める.

$XY \leqq X(-X^2+2X)=-X^3+2X^2$ であるから，$f(X)=-X^3+2X^2$ とおくと，

$$f'(X)=-3X^2+4X=-X(3X-4)$$

であるから，$f'(X)=0$ のとき，$X=0,\ \dfrac{4}{3}$ である．ゆえに，増減表は次のようになる．

X	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(X)$		$+$	0	$-$	
$f(X)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	(0)

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{64}{27}+2\cdot\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$$

よって，$f(X)$ のとり得る値の範囲は，

$$0<f(X)\leqq\frac{32}{27} \iff 0<2^{x+y}\leqq\frac{32}{27}$$

$2^{x+y}\leqq\dfrac{32}{27}$ において，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$x+y\leqq\log_2\frac{2^5}{3^3}=5-3\log_2 3$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x+y\leqq 5-3\log_2 3}$$ ……**(答)**

解説

$X=2^x$ などと置いて考える典型的な問題です．また，図形と方程式や微分積分との融合問題になっているため，これらの分野をしっかりと理解していなければ難しいと感じるでしょう．

(1) は，円と直線が共有点をもつための条件に持ち込みますが，$Y>0$ という条件があることに注意が必要です．また，解答の図を見てもわかるように，円と直線が第 4 象限で接するときと，直線が点 $(2-\sqrt{3},\ 0)$ を通るときは非常に k の値が近いため単に図から判断するのではなく，どちらの k の値が大きいかを吟味しなければいけません．

(2) は，$x+y$ のとり得る値なので，$x+y=k$ と置いて考えるのではなく，$XY=2^{x+y}$ となる部分に着目しましょう．$x+y$ のとり得る値を求めれば XY のとり得る値の範囲が求まります．$XY\leqq f(X)$ なので，$f(X)$ のとり得る範囲を考えればよいことに気付けるかどうかがポイントです．