22 ('15 宇都宮大) 【難易度】… 標準

微分可能な関数 $f(x)$ は，2 つの条件 $f'(x)=xe^x$，$f(1)=0$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) すべての x に対して次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x)=f(x)+\frac{(2-x)e^x}{e-1}\int_0^1 g(t)\,dt$$

(3) $g(x)$ を (2) で求めた関数とし，k を定数とする．x についての方程式 $g(x)=kx$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてよい．

【テーマ】：軌跡と面積

方針

(1) は，不定積分をすれば求められます．(2) は，$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ が定数であることから A とおいて，A の値を求めます．(3) は，$\dfrac{g(x)}{x}=k$ として，$h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ とおき，そのグラフを考えます．

♣ ♠

解答

(1) $f(x)=\displaystyle\int xe^x\,dx$ であるから，

$$f(x)=xe^x-\int e^x\,dx=(x-1)e^x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる．$f(1)=0$ より $C=0$ を得る．したがって，

$$f(x)=\boldsymbol{(x-1)e^x}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=A$ とおくと，

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x-1)e^x+\frac{(2-x)e^x}{e-1}A\\
&=\left(x-1+\frac{A(2-x)}{e-1}\right)e^x\\
&=\left\{\left(1-\frac{A}{e-1}\right)x+\frac{2A}{e-1}-1\right\}e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad A&=\int_0^1\left\{\left(1-\frac{A}{e-1}\right)te^t+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)e^t\right\}dt\\
&=\left(1-\frac{A}{e-1}\right)\Big[(t-1)e^t\Big]_0^1+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)\Big[e^t\Big]_0^1 \quad\cdots\cdots \text{Ⓐ} \quad (\because\ (1))\\
&=\left(1-\frac{A}{e-1}\right)+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)(e-1)
\end{aligned}$$

これを A について解くと，$A=e-1$ を得るので，

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x-1)e^x+(2-x)e^x\\
&=\boldsymbol{e^x}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $x=0$ は方程式 $g(x)=kx$ の解ではないので，$x\neq 0$ として，

$$e^x=kx \iff \frac{e^x}{x}=k$$

である．$h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと，$g(x)=kx$ の異なる実数解の個数は，$h(x)=k$ の実数解の個数と一致する．すなわち $y=h(x)$ と $y=k$ のグラフの交点の個数と一致する．

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

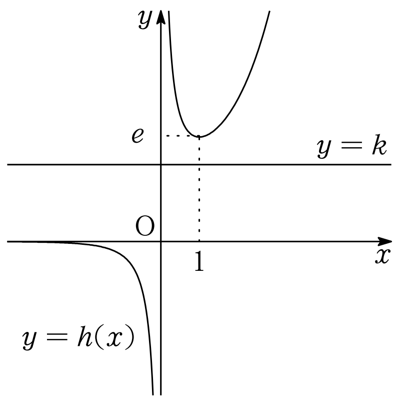
$h'(x) = 0$ のとき，$x = 1$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0		$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$h'(x)$		$-$			$-$	0	$+$	
$h(x)$	(0)	↘	$(-\infty)$	(∞)	↘	e	↗	(∞)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{e^x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{e^x}{x} = \infty$$

ゆえに，グラフは右図のようになる．



よって，求める実数解の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k > e} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k = e,\ k < 0} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0 \leqq k < e} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

微分積分の総合問題です．前半は，不定積分から関数 $f(x)$ を定め，積分方程式を解くことで $g(x)$ を求めます．

(2) は，積分方程式なので，$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ が定数であることに着目してこの値を A とおき，A についての方程式を解きます．その際，Ⓐ の部分の計算は，$\displaystyle\int te^t\,dx$ を (1) で計算しているので，その結果を用いれば，2 度も部分積分法をする必要がありません．

(3) は，グラフを用いて実数解の個数を求める頻出問題です．関数 $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ のグラフを考えますが，グラフを用いて求める場合は，必ず $x \to \pm\infty$ を調べる必要があります．また，$h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ は $x = 0$ で定義できない関数ですから，$x \to \pm 0$ も調べる必要があります．これは，単調増加だけでは $x \to \infty$ のときの関数の極限がわからないからです．例えば，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} h(x) = e^2$ か $\displaystyle\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$ かで，答えが変わってきますよね．だから，$x \to \infty$ を調べる必要があるのです．