24 （′15　九州大） 【難易度】 … 標準

座標平面上で，$y = 3 - \log_2(3-x)\ (x < 3)$，$y = 3 - x$ および $y = 9 - 3x$ で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

(1)　S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2)　座標平面において，S を原点のまわりに 1 回転したときに S が通過する領域を T とし，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を V とする．T を座標平面上に図示し，V の体積を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

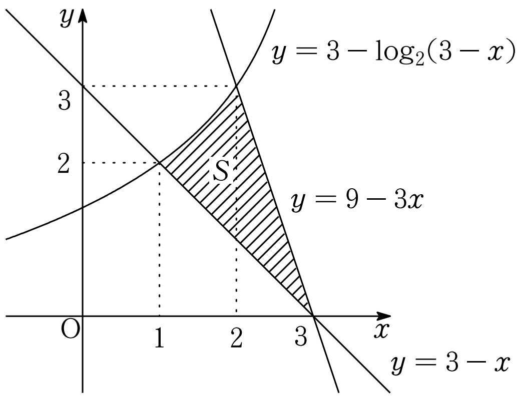
方針

(1) は，領域 S を図示して回転体の体積を考えます．(2) は，回転軸（ここでは原点）からの距離が一番近い点と遠い点に着目します．

♣ ♠

解答

(1)　$y = 3 - \log_2(3-x)$ と $y = 3 - x$ の交点は，$(1, 2)$ であり，$y = 3 - \log_2(3-x)$ と $y = 9 - 3x$ の交点は，$(2, 3)$ である．



よって，求める立体の体積を W_1 とすると，

$$W_1 = \int_1^2 \pi\{3 - \log_2(3-x)\}^2\,dx + \int_2^3 \pi(9-3x)^2\,dx - \int_1^3 \pi(3-x)^2\,dx$$

ここで，3 つの定積分において $3 - x = t$ とおくと，$-dx = dt$ であり，それぞれの積分区間は，

x	$1 \to 2$
t	$2 \to 1$

x	$2 \to 3$
t	$1 \to 0$

x	$1 \to 3$
t	$2 \to 0$

である．したがって，

$$\begin{aligned} W_1 &= \pi\int_2^1 (3 - \log_2 t)^2\,(-dt) + \pi\int_1^0 9t^2\,(-dt) - \pi\int_2^0 t^2\,(-dt) \\ &= \pi\int_1^2 \{9 - 6\log_2 t + (\log_2 t)^2\}\,dt + \pi\int_0^1 9t^2\,dt - \pi\int_0^2 t^2\,dt \\ &= \pi\int_1^2 \left\{9 - 6\frac{\log t}{\log 2} + \left(\frac{\log t}{\log 2}\right)^2\right\}dt + \pi\int_0^1 9t^2\,dt - \pi\int_0^2 t^2\,dt \end{aligned}$$

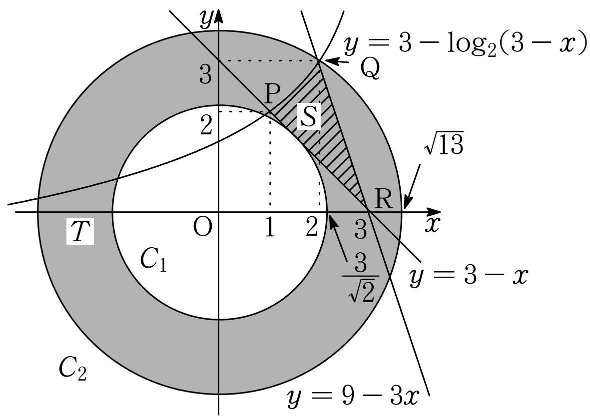
ここで，$\displaystyle\int \log t\,dt = t\log t - t + C_1$（$C_1$ は積分定数）であり，

$$\begin{aligned} \int (\log t)^2\,dt &= t(\log t)^2 - \int t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}\,dt \\ &= t(\log t)^2 - 2\int \log t\,dt \\ &= t(\log t)^2 - 2(t\log t - t) + C_2 \end{aligned}$$（C_2 は積分定数）

であるから，

$$W_1=\pi\left[\,9t-\frac{6}{\log 2}(t\log t-t)+\frac{t(\log t)^2-2t\log t+2t}{(\log 2)^2}\,\right]_1^2+\pi\left[\,3t^3\,\right]_0^1-\pi\left[\,\frac{1}{3}t^3\,\right]_0^2$$
$$=\pi\left\{9(2-1)-\frac{6}{\log 2}\{2\log 2-2-(0-1)\}+\frac{\{2(\log 2)^2-4\log 2+4\}-(0-0+2)}{(\log 2)^2}\right\}$$
$$+3\pi(1-0)-\frac{\pi}{3}(8-0)$$
$$=\pi\left\{9-12+\frac{6}{\log 2}+\frac{2(\log 2)^2-4\log 2+2}{(\log 2)^2}+3-\frac{8}{3}\right\}$$
$$=\pi\left\{-3+\frac{6}{\log 2}+2-\frac{4}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}+\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\left\{\boldsymbol{\frac{2}{(\log 2)^2}+\frac{2}{\log 2}-\frac{2}{3}}\right\}\boldsymbol{\pi}\text{……（答）}$$

(2)　P(1, 2), Q(2, 3), R(3, 0) とすると，原点からの距離が最も遠いのは点 Q であり，最も近いのは直線 PR へ原点から垂線を引いたときの交点である．



原点と直線 PR の距離を d_1 とすると，

$$d_1=\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

原点と点 Q の距離を d_2 とすると，

$$d_2=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

ゆえに，半径 d_1, d_2 の円をそれぞれ C_1, C_2 とすると，S が通過する領域 T は，円 C_1, C_2 によって囲まれた部分になる．ゆえに，右図網点部分である．

なお，C_1, C_2 の方程式は，次のようになる．

$$\begin{cases} C_1 \;:\; x^2+y^2=\dfrac{9}{2} \\ C_2 \;:\; x^2+y^2=13 \end{cases}$$

この領域 T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体が V となるので，その体積を W_2 とすると，

$$W_2=2\int_0^{\sqrt{13}}\pi(13-x^2)\,dx+2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\pi\left(\frac{9}{2}-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[\,13x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\sqrt{13}}+2\pi\left[\,\frac{9}{2}x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$
$$=2\pi\left(13\sqrt{13}-\frac{13\sqrt{13}}{3}\right)+2\pi\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}-\frac{9}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{52\sqrt{13}-27\sqrt{2}}{3}\pi}\text{……（答）}$$

◇ ♡

解説

(1) は，領域 S が図示できれば基本的な積分計算です．ただし，対数の底が 2 になっているので，底の変換公式で底を e にするほうが計算ミスが減らせるでしょう．

(2) は，まず領域 T を図示するわけですが，これは領域 S 内の点において，回転軸（ここでは原点）からの距離を考えます．なぜなら，回転させれば必ず円ができるので，最も原点から通い点と最も近い点だけを回転させればその他の点は，必ずこれらの軌跡の間にあることがわかるからです．領域全体をまわそうと考えると難しくなります．なお，最後の V の体積は，解答では円を回転させるという方法を取りましたが，円を回転させると球になるので，球の体積を用いて，

$$W_2=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{13})^3-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{52\sqrt{13}-27\sqrt{2}}{3}\pi$$

とすれば，簡単に求められます．