27 （'14 一橋大） 【難易度】 … やや難

数直線上の点 P を次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出れば P を ＋1 だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる．P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする．

（1） $a_3=0$ となる確率を求めよ．

（2） $a_4=1$ となる確率を求めよ．

（3） $n \geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1), (2) は，具体的な状況を考えても求められますが，(3) は，漸化式を立てて考えると求め易くなります．

解答

（1） $a_3=0$ となるのは，

（i） 表裏表の順に出る場合．

（ii） 裏裏裏の順に出る場合．

のいずれかであるから，求める確率を p とすると，

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） $a_4=1$ となるのは，

（i） $a_3=0$ かつ 4 回目が表の場合．

（ii） $a_3=-1$ かつ 4 回目が裏の場合．

のいずれかである．$a_3=-1$ となるのは，裏表裏と出るときであるから，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ である．
よって，求める確率を q とすると，

$$q=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3） $n \geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を r_n とする．$a_n=n-3$ となるのは，

（i） $a_{n-1}=n-4$ かつ n 回目が表の場合．

（ii） $a_{n-1}=-(n-3)$ かつ n 回目が裏の場合．

のいずれかである．$a_{n-1}=n-4$ となる確率は，r_{n-1} である．また，$a_{n-1}=-(n-3)$ となるのは，1 回目に裏が出て 2 回目から $n-2$ 回目までがすべて表であり，$n-1$ 回目で裏が出るとき，すなわち

$$0\xrightarrow{\text{裏}}0\underbrace{\xrightarrow{\text{表}}1\xrightarrow{\text{表}}2\xrightarrow{\text{表}}\cdots\cdots\xrightarrow{\text{表}}}_{n-3\text{ 回}}(n-3)\xrightarrow{\text{裏}}-(n-3)$$

となる場合であるから，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である．

ゆえに，$n \geqq 3$ のとき，

$$r_n = \frac{1}{2}r_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \iff r_n = \frac{1}{2}r_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

が成り立つ．両辺に 2^n をかけて，

$$2^n r_n = 2^{n-1} r_{n-1} + 1 \quad (n \geqq 3)$$

より，数列 $\{2^n r_n\}$ は，初項 $2^3 r_3$，公差 1 の等差数列である．r_3 は $a_3 = 0$ となる確率であるから，(1) より $r_3 = \dfrac{1}{4}$ である．ゆえに，

$$2^n r_n = 8r_3 + (n-3)\cdot 1 = 8\cdot\frac{1}{4} + n - 3 = n - 1$$

$$\therefore \quad r_n = \boldsymbol{\frac{n-1}{2^n}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1), (2) は，考えられる状況をもれなく挙げれば求められますが，(3) は規則的な動きをするものなので漸化式が有効です．漸化式を立てることができなくても，n 回移動して $n-3$ に到着しなければならないので，裏は最大 3 回までしか出せないことに気付けば，漸化式を用いず直接考えることもできます．

別解

初めて表が出るのが k 回目であるとすると，$a_n = n-3$ であるから，$k \leqq 4$ である．このとき，k の値によって場合分けを行う．

(i) $k = 1$ のとき，P の座標の変化は，

$0 \to 1 \xrightarrow{\text{裏}} -1 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \to 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$

(ii) $k = 2$ のとき，P の座標の変化は，3 回目以降どのタイミングで裏が出るかで，次の $n-3$ 通りがある．

$0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \to 1 \xrightarrow{\text{裏}} -1 \xrightarrow{\text{裏}} 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$

$0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \to 1 \to 2 \xrightarrow{\text{裏}} -2 \xrightarrow{\text{裏}} 2 \to \cdots\cdots \to n-3$

$\vdots$

$0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \cdots\cdots \to (n-3) \xrightarrow{\text{裏}} -(n-3) \xrightarrow{\text{裏}} n-3$

(iii) $k = 3$ のとき，$a_n = n-3$ となることはない．

(iv) $k = 4$ のとき，P の座標の変化は，

$0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \xrightarrow{\text{裏}} 0 \to 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$

よって，(i)〜(iv) より全部で $n-1$ 通りあるから，求める確率 r_n は，

$$r_n = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boldsymbol{\frac{n-1}{2^n}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$