31 （'15　一橋大） 【難易度】 … やや難

座標平面上の原点を O とする．点 A$(a, 0)$，点 B$(0, b)$ および点 C が

$$\mathrm{OC} = 1,\quad \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

(1) $s = a^2 + b^2$, $t = ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

(2) △ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ．

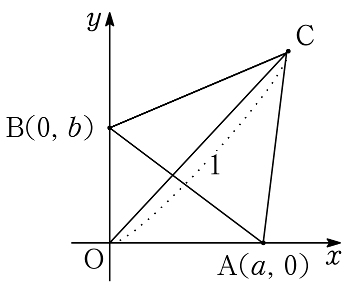
【テーマ】：ベクトルと図形

方針

(1) では，ベクトルを利用すると計算が楽になります．(2) は，(1) の結果を用いて a^2, b^2 を 2 解にもつ 2 次方程式を求め，実数条件より s, t のとり得る値の範囲を求めます．

♣ ♠

解答



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a, b)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，

$$\vec{e} = \pm\frac{(b, a)}{|(b, a)|} = \pm\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である．線分 AB の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ であり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\vec{e}\\ &= \left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\ &= \left(\frac{a \pm \sqrt{3}b}{2},\ \frac{b \pm \sqrt{3}a}{2}\right) \quad \text{（複号同順）}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = 1$ より，

$$\left(\frac{a \pm \sqrt{3}b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b \pm \sqrt{3}a}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{（複号同順）}$$

$$a^2 + b^2 \pm \sqrt{3}ab = 1$$

よって，s, t の満たす関係式は，$\boldsymbol{s \pm \sqrt{3}t = 1}$……**（答）**

(2) △ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}s$$

である．ここで，$a^2 + b^2 = s$, $a^2b^2 = t^2$ であることから，a^2, b^2 を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$u^2 - su + t^2 = 0 \text{ ……①}$$

となり，これが 0 以上の 2 つの実数解をもてばよい．

① の判別式を D とすると,

$$D \geqq 0 \text{ かつ } s \geqq 0 \text{ かつ } t \geqq 0$$

を満たせばよい. (1) より, $t^2 = \dfrac{(1-s)^2}{3}$ であるから,

$$D \geqq 0 \iff s^2 - \frac{4}{3}(1-s)^2 \geqq 0 \iff 4 - 2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4 + 2\sqrt{3} \cdots\cdots ②$$

$$s \geqq 0 \cdots\cdots ③$$

$$t \geqq 0 \iff \frac{(1-s)^2}{3} \geqq 0 \cdots\cdots ④$$

④ は常に成り立ち, ② と ③ の共通部分は ② と一致するので, $4 - 2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4 + 2\sqrt{3}$ である. よって,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4 - 2\sqrt{3}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}s \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$$

$$\boldsymbol{\sqrt{3} - \frac{3}{2} \leqq S \leqq \sqrt{3} + \frac{3}{2}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は, C の座標を $(p,\ q)$ とおいて, 直線の方程式などを求めて図形と方程式の知識でも解くことができますが, 計算量が多くなるため, ベクトルを利用するという解法をとっています. ベクトルを利用することですっきりとした答案が作成できるため, 見通しがよくなります. ベクトルの力を見せ付けられる問題でもありますね！なお, 複素数平面を学習している人は, 点 A を点 B のまわりに 60° 回転させても点 C の座標を求めることができます. 多くの知識があれば, 最適な方法で解答できるため, 日頃から別解の研究をしておくと実戦で役立つでしょう.