2 （′15　東北大） 【難易度】 … 基本

xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を ℓ とし，P を通り ℓ と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

【テーマ】：楕円の媒介変数表示

方針

まずは，点 P の座標を $\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ とおき，S を θ を用いて表すことを考えます．

♣ ♠

解答

曲線 C 上の点 P の座標を $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，直線 ℓ の方程式は，

$$(\cos\theta)x+4\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)y=1 \iff (\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=1$$

である．直線 m は点 P を通り，直線 ℓ に垂直なので直線 m の方程式は，

$$2\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta\left(y-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=0 \iff (2\sin\theta)x-(\cos\theta)y=\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta$$

である．よって，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q, R とすると，

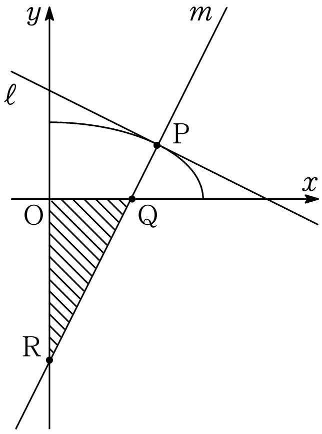
$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(0,\ -\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

ゆえに，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{32}\sin 2\theta$$

$0<2\theta<\pi$ であるから，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとる．このとき，P の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ となるので，

$$\boldsymbol{S\ \text{の最大値：}\frac{9}{32},\quad \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}\cdots\cdots\text{(答)}$$



♢ ♡

解説

まずは，曲線 C 上の点を媒介変数 θ を用いて表すことから始めます．もちろん $\mathrm{P}(a,\ b)$ とおいて解答することもできますが，このように置くと，$a,\ b$ の関係式 $a^2+4b^2=1$ を用いて 1 文字消去をしなければならないため計算が煩雑になります．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は，$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と置くことができることを知っておくとよいでしょう．

ちなみに，直線 $ax+by+c=0$ に垂直で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の方程式は，

$$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$$

と表すことができます．解答では，直線 m の方程式を用いる際にこのことを利用しています．