

◀2014年 神戸大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 a を実数とし, $f(x) = xe^x - x^2 - ax$ とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, f(0))$ における接線の傾きを -1 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.
- (3) b を実数とすると, 2つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + ax + b$ の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ.

2 m, n ($m < n$) を自然数とし,

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.
- (2) r を m, n を用いて表せ.
- (3) r が素数のときに, S を r を用いて表せ.
- (4) r が素数のときに, S が 6 で割り切れることを示せ.

3 空間において, 原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり, その頂点を順に A, B, C, D とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル \vec{OD} を, $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ を用いて表せ.
- (2) $OA = OB = OC$ のとき, ベクトル

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$$

が, 平面 α と垂直であることを示せ.

4 n を自然数とする. 1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ, よくかき混ぜて n 枚を取り出し, 取り出した n 枚のカードの数字の合計を A , 残された n 枚のカードの数字の合計を B とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が奇数のとき, A と B が等しくないことを示せ.
- (2) n が偶数のとき, A と B の差は偶数であることを示せ.
- (3) $n = 4$ のとき, A と B が等しい確率を求めよ.

5 a, b を正の実数とし, xy 平面上に 3 点 $O(0, 0), A(a, 0), B(a, b)$ をとる. 三角形 OAB を, 原点 O を中心に 90° 回転するとき, 三角形 OAB が通過してできる図形を D とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) D を xy 平面上に図示せよ.
- (2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.
- (3) $a + b = 1$ のとき, (2) で求めた V の最小値と, そのときの a の値を求めよ.

♠ 文系学部

1 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とし,

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) n を 2 以上の自然数とするとき,

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ.

(2) 曲線 $y = c_1x^3 - c_3x^2 - c_2x + c_4$ の極値を求めよ.

(3) 曲線 $y = c_1x^2 - c_3x + c_2$ と, x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 理系学部の **2** と同じ.

3 理系学部の **3** と同じ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 標準 III 微分法の応用
- 2** 難 I 図形と計量・ A 整数問題
- 3** 標準 B ベクトル (空間)
- 4** 標準 A 確率・ B 数列
- 5** 標準 III 積分法の応用

♣ 文系学部

- 1** 標準 II 微分積分・ B 数列
- 2** 難 I 図形と計量・ A 整数問題
- 3** 標準 B ベクトル (空間)

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a = 2$

(2) 極大値: $1 - \frac{1}{e}$ ($x = -1$), 極小値: $-(\log 2)^2$ ($x = \log 2$)

(3)
$$\begin{cases} b < -(\log 2)^2, 1 - \frac{1}{e} < b \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ b = -(\log 2)^2, e - 3 < b \leq 1 - \frac{1}{e} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -(\log 2)^2 < b \leq e - 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

2 (1) 証明は省略

(2) $r = m(n - m)$

(3) $S = r(r + 1)(r + 2)$ または $S = r(r + 1)(2r + 1)$

(4) 証明は省略

3 (1) $\vec{OD} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$

(2) 証明は省略

4 (1) 証明は省略

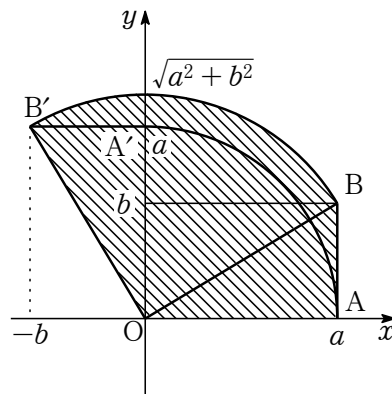
(2) 証明は省略

(3) $\frac{4}{35}$

5 (1) 領域 D は右図斜線部分で境界線上の点を含む.

(2) $V = \frac{\pi}{3}(2a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 2b^3)$

(3) 最小値: $\frac{124 - 26\sqrt{13}}{81}\pi$ ($a = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$)



◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 極大値: $\frac{203}{27}$ ($x = -\frac{1}{3}$), 極小値: -11 ($x = 3$)

(3) $\frac{4}{3}$

2 理系学部 2 と同じ.

3 理系学部 3 と同じ.